Рубрика: математическая физика.

Тематика: специальная теория относительности.

Кочетков Виктор Николаевич

главный специалист ФГУП «Центр эксплуатации объектов наземной космической инфраструктуры» (ФГУП «ЦЭНКИ»)

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ БЕЗ ПОСТУЛАТА О ПОСТОЯНСТВЕ СКОРОСТИ СВЕТА

В данной статье делается попытка рассмотрения специальной теории относительности в общем виде без использования постулата об инвариантности скорости света.

1.Основные уравнения специальной теории относительности

Предположим, что имеются две инерциальные системы отсчета неподвижная $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижная $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, изображенные на рис.1 и у которых:

- сходные оси декартовых координат систем $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ попарно параллельны и одинаково направлены;

- система $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, движется относительно системы $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ с постоянной скоростью $\mathbf{V_2}$ относительно оси $\mathbf{Ox_1}$;

- в качестве начала отсчета времени ($\mathbf{t_1}$=0 и $\mathbf{t_2}$=0) в обеих системах выбран тот момент, когда начала координат $\mathbf{O_1}$ и $\mathbf{O_2}$ этих систем совпадают.

Исходя из симметрии пространства и времени (однородности и изотропности пространства и однородности времени), соотношения между координатами и временем одного и того же события в двух инерциальных системах отсчета неподвижной $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижной $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ могут быть записаны следующим образом:

$$x_1 = \beta_1 \cdot (x_2 + V_1 \cdot t_2) \qquad (1)$$

$$x_2 = \beta_2 \cdot (x_1 + V_2 \cdot t_1) \qquad (2)$$

$$y_1 = \beta_3 \cdot y_2 \qquad (3)$$

$$y_2 = \beta_4 \cdot y_1 \qquad (4)$$

$$z_1 = \beta_5 \cdot z_2 \qquad (5)$$

$$z_2 = \beta_6 \cdot z_1 \qquad (6)$$

где: $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{z_1}$ и $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{y_2}$, $\mathbf{z_2}$ – координаты точки **А** в системах отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ соответственно;

$\mathbf{t_1}$ и $\mathbf{t_2}$ - значения времени в системах отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ соответственно;

$\boldsymbol{\beta_1}$, $\boldsymbol{\beta_2}$, $\boldsymbol{\beta_3}$, $\boldsymbol{\beta_4}$, $\boldsymbol{\beta_5}$ и $\boldsymbol{\beta_6}$ - коэффициенты перехода;

$\mathbf{V_1}$ - скорость движения система $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ относительно системы $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$.

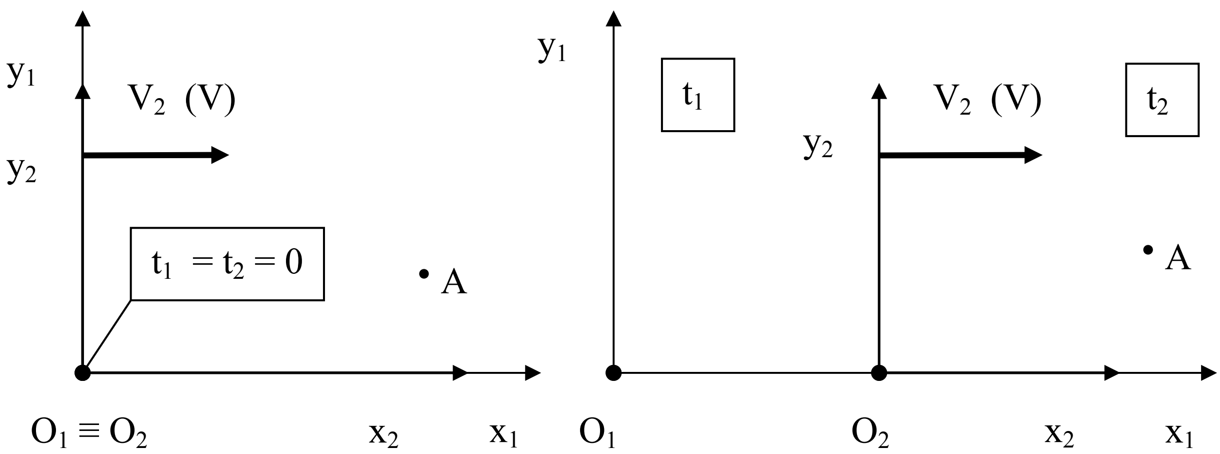

Рис. 1

Использование принципа относительности и симметрии пространства и времени позволяет получить:

$$V_1 = -V_2 = V \qquad (7)$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta \qquad (8)$$

$$\beta_3 = \beta_4 = 1 \qquad (9)$$

$$\beta_5 = \beta_6 = 1 \qquad (10)$$

При этом система уравнений (1)-:-(6) упростится и примет вид:

$$x_1 = \beta \cdot (x_2 + V \cdot t_2) \qquad (11)$$

$$x_2 = \beta \cdot (x_1 - V \cdot t_1) \qquad (12)$$

$$y_1 = y_2 \qquad (13)$$

$$z_1 = z_2 \qquad (14)$$

Причем коэффициент перехода **β** не зависит от значений координат $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{y_2}$, $\mathbf{z_2}$ и времени $\mathbf{t_1}$ и $\mathbf{t_2}$, а предположительно может являться функцией скорости **V** перемещения систем отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ относительно друг друга.

Из формул (11) и (12) можно записать зависимость для значений времен $\mathbf{t_1}$ и $\mathbf{t_2}$:

$$t_1 = \{[(\beta^2 - 1) \cdot x_2] / (\beta \cdot V)\} + (\beta \cdot t_2) \qquad (15)$$

$$t_2 = \{[(1 - \beta^2) \cdot x_1] / (\beta \cdot V)\} + (\beta \cdot t_1) \qquad (16)$$

Про коэффициент перехода **β** в формулах (11) и (12) можно сказать следующее:

- коэффициент перехода **β** будет равен 1 при **V** = 0;
- коэффициент перехода **β** будет равен 1, если коэффициент перехода **β** не будет зависеть от величины скорости **V**;
- при принятом направлении оси декартовых координат систем $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ коэффициент перехода **β** будет больше 0 , так как отрицательные значения коэффициент перехода **β** будет иметь при разной направленности осей $\mathbf{Ox_1}$ и $\mathbf{O_2x_2}$;
- при значении коэффициента перехода **β** > 1 линейный размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, уменьшается в направлении движения и ход времени часов, движущихся относительно инерциальной системы отсчета, замедляется;
- при значении коэффициента перехода 0 < **β** < 1 линейный размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, увеличивается в направлении движения и ход времени часов, движущихся относительно инерциальной системы отсчета, ускоряется.

Используя формулы (11) -:- (16) может быть получена связь между проекциями $\mathbf{v_{x2}}$, $\mathbf{v_{y2}}$ и $\mathbf{v_{z2}}$ скорости движения точки **A** в подвижной системе $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ на оси декартовых координат и аналогичными проекциями $\mathbf{v_{x1}}$, $\mathbf{v_{y1}}$ и $\mathbf{v_{z1}}$ скорости этой точки **A** в неподвижной системе $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

$$v_{x1} = (v_{x2} + V) / \boldsymbol{\{}\{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta^2 \cdot V)\} + 1\boldsymbol{\}} \qquad (17)$$

$$v_{x2} = (v_{x1} - V) / \boldsymbol{\{}\{[(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta^2 \cdot V)\} + 1\boldsymbol{\}} \qquad (18)$$

$$v_{y1} = v_{y2} / \boldsymbol{\{}\{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\}} \qquad (19)$$

$$v_{y2} = v_{y1} / \boldsymbol{\{}\{[(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\}} \qquad (20)$$

$$v_{z1} = v_{z2} / \boldsymbol{\{}\{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\}} \qquad (21)$$

$$v_{z2} = v_{z1} / \boldsymbol{\{}\{[(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\}} \qquad (22)$$

Используя формулу (17) для случая, когда коэффициент перехода $\boldsymbol{\beta} > 1$ при действительных значениях $\mathbf{V}$, $\mathbf{v_{x1}}$, $\mathbf{v_{x2}}$ можно отметить, что:

- при положительных значениях $\mathbf{v_{x2}}$:

$$v_{x1} \le (v_{x2} + V) \qquad (23)$$

- при отрицательных значениях $\mathbf{v_{x2}}$:

$$v_{x1} \ge (v_{x2} + V) \qquad (24)$$

Неравенства (23) и (24) не исключают, что при $\boldsymbol{\beta} > 1$ возможно существование такого действительного значения скорости $\mathbf{v_{x1}}$ движения точки в неподвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$, которое было бы равно значению скорости $\mathbf{v_{x2}}$ движения этой же точки в подвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$.

А используя формулу (17) для случая, когда коэффициент перехода $0 < \boldsymbol{\beta} < 1$ при действительных значениях $\mathbf{V}$, $\mathbf{v_{x1}}$, $\mathbf{v_{x2}}$ можно отметить, что:

- при положительных значениях $\mathbf{v_{x2}}$:

$$v_{x1} \ge (v_{x2} + V) \qquad (25)$$

или при $\mathbf{V} \neq 0$: $\qquad v_{x1} > v_{x2} \qquad (26)$

- при отрицательных значениях $\mathbf{v_{x2}}$:

$$v_{x1} \le (v_{x2} + V) \qquad (27)$$

Неравенства (25) -:- (27) показывают, что при $0 < \boldsymbol{\beta} < 1$ не может существовать такое действительное значение скорости $\mathbf{v_{x1}}$ движения точки в неподвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$, которое было бы равно значению скорости $\mathbf{v_{x2}}$ движения этой же точки в подвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$.

Из формул (15) -:- (22) может быть получена связь между проекциями $\boldsymbol{a}_{\mathbf{x2}}$, $\boldsymbol{a}_{\mathbf{y2}}$ и $\boldsymbol{a}_{\mathbf{z2}}$ ускорения точки **A** в подвижной системе $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ на оси декартовых координат и аналогичными проекциями $\boldsymbol{a}_{\mathbf{x1}}$, $\boldsymbol{a}_{\mathbf{y1}}$ и $\boldsymbol{a}_{\mathbf{z1}}$ ускорения этой точки **A** в неподвижной системе $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

$$a_{x1} = (a_{x2} \cdot \beta^{-3}) / \boldsymbol{\{}\{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta^2 \cdot V)\} + 1\boldsymbol{\}}^3 \qquad (28)$$

$$a_{x2} = (a_{x1} \cdot \beta^{-3}) / \boldsymbol{\{}\{[(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta^2 \cdot V)\} + 1\boldsymbol{\}}^3 \qquad (29)$$

$$a_{y1} = \frac{\boldsymbol{(}a_{y2} \cdot \boldsymbol{\{}\{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\}}\boldsymbol{)} - \{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{y2} \cdot a_{x2}] / (\beta \cdot V)\}}{\boldsymbol{\{}\{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\}}^3} \qquad (30)$$

$$a_{y2} = \frac{\boldsymbol{(}a_{y1} \cdot \boldsymbol{\{}\{[(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\}}\boldsymbol{)} - \{[(1 - \beta^2) \cdot v_{y1} \cdot a_{x1}] / (\beta \cdot V)\}}{\boldsymbol{\{}\{[(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\}}^3} \qquad (31)$$

$$a_{z1} = \frac{\boldsymbol{(}a_{z2} \cdot \boldsymbol{\{}\{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\}}\boldsymbol{)} - \{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{z2} \cdot a_{x2}] / (\beta \cdot V)\}}{\boldsymbol{\{}\{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\}}^3} \qquad (32)$$

$$a_{z2} = \frac{\boldsymbol{(}a_{z1} \cdot \boldsymbol{\{}\{[(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\}}\boldsymbol{)} - \{[(1 - \beta^2) \cdot v_{z1} \cdot a_{x1}] / (\beta \cdot V)\}}{\boldsymbol{\{}\{[(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\}}^3} \qquad (33)$$

2. Определение особой скорости

Допустим, что существует такое значение $\mathbf{V_{xкр}}$ проекции $\mathbf{v_{x1}}$ скорости движения точки **A** в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$, которому бы соответствовала значение проекции $\mathbf{v_{x2}}$ скорости движения точки **A** в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, равное $\mathbf{V_{xкр}}$, т.е. когда:

$$v_{x1} = v_{x2} = V_{xкр} \qquad (34)$$

Подставив значение (34) в формулу (17) или (18), получим:

$$V_{xкр}^2 = (\beta^2 \cdot V^2) / (\beta^2 - 1) \qquad (35)$$

В случае если коэффициент перехода $\boldsymbol{\beta}$ имеет значение $\boldsymbol{\beta > 1}$, получим, что $\mathbf{V_{xкр1}}$ будет иметь действительное значение (что находится в соответствии с условиями (23) и (24)) :

$$V_{xкр1} = v_{xкр1} = \pm (\beta \cdot V) / (\beta^2 - 1)^{1/2} \qquad (36)$$

где: $\mathbf{v_{xкр1}}$ - действительная величина, имеющая размерность скорости.

А в случае если коэффициент перехода $\boldsymbol{\beta}$ имеет значение $\mathbf{0 < \beta < 1}$, получим, что $\mathbf{V_{xкр2}}$ будет иметь мнимое значение (что находится в соответствии с условиями (25) -:- (27)) :

$$V_{xкр2} = í \cdot v_{xкр2} = \pm (í \cdot \beta \cdot V) / (1 - \beta^2)^{1/2} \qquad (37)$$

где: $\mathbf{v_{xкр2}}$ - действительная величина, имеющая размерность скорости.

Из формулы (35) можно получить, что:

$$\beta^2 = 1 / [1 - (V^2 / V_{xкр}{}^2)] \qquad (38)$$

Тогда из формулы (38) с учетом формулы (36) для коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$, имеющего значения $\mathbf{\beta > 1}$ и который обозначим как $\boldsymbol{\beta_>}$, можно записать:

$$\beta_>{}^2 = 1 / [1 - (V^2 / v_{xкр1}{}^2)] \qquad (39)$$

А из формулы (38) с учетом формулы (37) для коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$, имеющего значения $\mathbf{0<\beta< 1}$ и который обозначим как $\boldsymbol{\beta_<}$, можно записать:

$$\beta_<{}^2 = 1 / [1 + (V^2 / v_{xкр2}{}^2)] \qquad (40)$$

3. Уравнение связи для коэффициентов перехода

Рассмотрим три инерциальные системы отсчета неподвижной $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижные $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ и $\mathbf{O_3x_3y_3z_3}$, показанные на рис.2 и у которых:

- сходные оси декартовых координат систем $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$, $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ и $\mathbf{O_3x_3y_3z_3}$ попарно параллельны и одинаково направлены;

- система $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, движется относительно системы $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ с постоянной скоростью $\mathbf{V_2}$ относительно оси $\mathbf{Ox_1}$;

- система $\mathbf{O_3x_3y_3z_3}$, движется относительно системы $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ с постоянной скоростью $\mathbf{V_3}$ относительно оси $\mathbf{Ox_1}$;

- в качестве начала отсчета времени ($\mathbf{t_1}$=0 , $\mathbf{t_2}$=0 и $\mathbf{t_2}$=0) в этих трех системах выбран тот момент, когда их начала координат $\mathbf{O_1}$, $\mathbf{O_2}$ и $\mathbf{O_3}$ совпадают.

Опираясь на формулу (18) можно определить значение скорости $\mathbf{V_{23}}$ движения точки $\mathbf{O_3}$ относительно точки $\mathbf{O_2}$:

$$V_{23} = (V_3 - V_2) / \{\{[(1 - \beta_2^2) \cdot V_3] / (\beta_2^2 \cdot V_2)\} + 1\} \qquad (41)$$

и значение скорости $\mathbf{V_{32}}$ движения точки $\mathbf{O_2}$ относительно точки $\mathbf{O_3}$:

$$V_{32} = (V_2 - V_3) / \{\{[(1 - \beta_3^2) \cdot V_2] / (\beta_3^2 \cdot V_3)\} + 1\} \qquad (42)$$

где: $\boldsymbol{\beta_2}$ и $\boldsymbol{\beta_3}$ - коэффициенты перехода для инерциальных систем отсчета, движущихся относительно неподвижной системы отсчета со скоростью $\mathbf{V_2}$ и $\mathbf{V_3}$ соответственно.

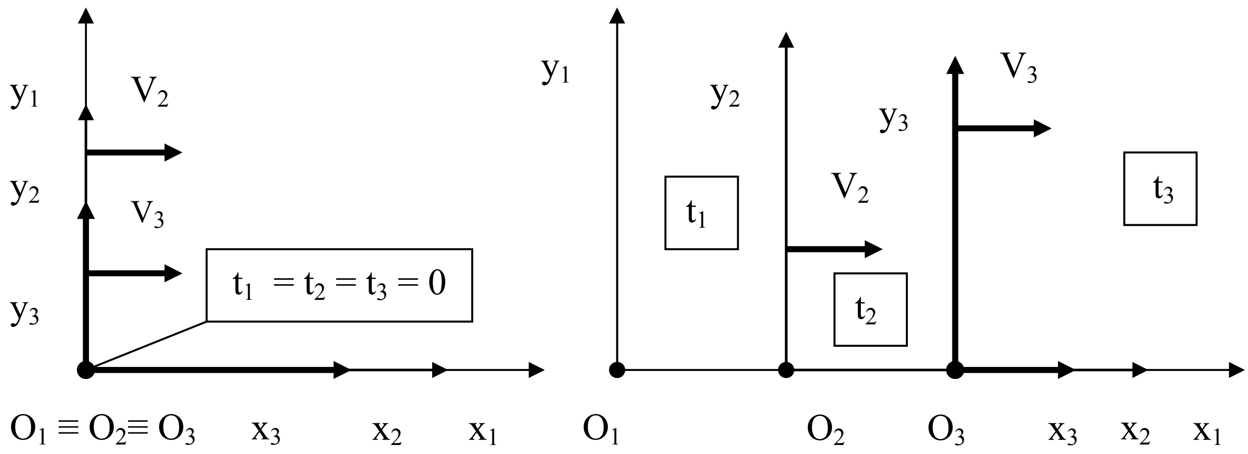

Рис. 2

Используя принцип относительности, согласно которому точка $\mathbf{O_3}$ будет удаляться относительно точки $\mathbf{O_2}$ со скоростью, равной по абсолютной величине и противоположно направленной скорости, с которой точка $\mathbf{O_2}$ удаляется относительно точки $\mathbf{O_3}$, т.е.:

$$V_{32} = - V_{23} \qquad (43)$$

Подставив уравнение (43) в формулы (41) и (42) получим:

$$\{[(1 - \beta_2^2) \cdot V_3] / (\beta_2^2 \cdot V_2)\} + 1 = \{[(1 - \beta_3^2) \cdot V_2] / (\beta_3^2 \cdot V_3)\} + 1 \qquad (44)$$

Отсюда уравнение для коэффициентов перехода $\boldsymbol{\beta_2}$ и $\boldsymbol{\beta_3}$ запишется следующим образом:

$$\beta_3^2 = (\beta_2^2 \cdot V_2) / [V_3^2 - (\beta_2^2 \cdot V_3) + (\beta_2^2 \cdot V_2)] \qquad (45)$$

4. Получение зависимостей для коэффициентов перехода

Из уравнения (44) можно получить формулу:

$$(\beta_2^2 - 1) / (\beta_2^2 \cdot V_2^2) = (\beta_3^2 - 1) / (\beta_3^2 \cdot V_3^2) \qquad (46)$$

Так как величины коэффициентов перехода β_2 и β_3 не зависят друг от друга, а зависят только от величин скоростей V_2 и V_3 соответственно, и величины скоростей V_2 и V_3 задавались произвольно (также не зависят друг от друга), то можно сказать, что:

$$(\beta_2^2 - 1) / (\beta_2^2 \cdot V_2^2) = (\beta_3^2 - 1) / (\beta_3^2 \cdot V_3^2) = К = \mathbf{Const} \qquad (47)$$

т.е. получается в общем виде, что:

$$(\beta^2 - 1) / (\beta^2 \cdot V^2) = К = \mathbf{Const} \qquad (48)$$

где: **К** - постоянная величина, независящая от величины скорости **V** (**V_2** и **V_3**) и величины коэффициента перехода **β** (**β_2** и **β_3**) и имеющая размерность обратную квадрата скорости.

При величине коэффициента перехода **β > 1** формула (48) примет вид:

$$(\beta_>^2 - 1) / (\beta_>^2 \cdot V^2) = К_> \qquad (49)$$

где: **$К_>$** - положительная постоянная величина, независящая от величины скорости **V** и величины коэффициента перехода **β** (в диапазоне значений **β** > 1);

$\beta_>$ - коэффициент перехода **β** , значения которого находятся в диапазоне значений **β** > 1 .

А при величине коэффициента перехода **0 < β < 1** формула (48) запишется:

$$(\beta_<^2 - 1) / (\beta_<^2 \cdot V^2) = К_< \qquad (50)$$

где: **$К_<$** - отрицательная постоянная величина, независящая от величины скорости **V** и величины коэффициента перехода **β** (в диапазоне значений **0 < β < 1**);

$\beta_<$ - коэффициент перехода **β** , значения которого находятся в диапазоне значений **0 < β < 1** .

Из уравнения (48) можно получить формулу для коэффициента перехода **β**:

$$\beta^2 = 1 / [1 - (К \cdot V^2)] \qquad (51)$$

Для случая коэффициента перехода **β > 1** формула (51) с учетом формулы (48) примет вид:

$\beta_>^2 = 1 / [1 - (К_> \cdot V^2)]$ (52)

А для случая коэффициента перехода $\mathbf{0 < \beta < 1}$ формула (51) с учетом формулы (50) примет вид:

$\beta_<^2 = 1 / [1 - (К_< \cdot V^2)]$ (53)

Если вернуться к формулам (39) и (40):

$\beta_>^2 = 1 / [1 - (V^2 / v_{хкр1}^2)]$ (39)

$\beta_<^2 = 1 / [1 + (V^2 / v_{хкр2}^2)]$ (40)

и сравнивая их с формулами (52) и (53), то можно отметить, что:

$К_> = 1 / v_{хкр1}^2$ (54)

$К_< = - (1 / v_{хкр2}^2)$ (55)

А учитывая, что $\mathbf{К_>}$ и $\mathbf{К_<}$ являются постоянными величинами, независящими от величины скорости $\mathbf{V}$ перемещения подвижной системы отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ относительно покоящейся системы $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$, можно сделать следующий вывод:

что $\mathbf{v_{хкр1}}$ и $\mathbf{v_{хкр2}}$ тоже являются постоянными величинами, не зависящими от величины скорости $\mathbf{V}$, т.е.:

$\mathbf{v_{хкр1} = Const}$ (56)

$\mathbf{v_{хкр2} = Const}$ (57)

А возвращаясь к формуле (36) с учетом формулы (56) можно отметить, что в случае, если коэффициент перехода $\mathbf{\beta > 1}$, то должна существовать величина скорости $\mathbf{V_{хкр1}}$ (равная $\mathbf{v_{хкр1}}$) движения точки, которая была бы инвариантна во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета.

Формулы (37) и (57) показывают, что для случая, если коэффициент перехода $\mathbf{0 < \beta < 1}$, то особая скорость $\mathbf{V_{хкр2}}$ (равная $\mathbf{(\acute{\imath} \cdot v_{хкр2})}$) будет величиной мнимой постоянной и инвариантной во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета.

5. Основные уравнения специальной теории относительности при β > 1

Подставив формулу (39) в уравнения (11), (12), (15)-:-(22) и (28)-:-(33), получим следующую систему уравнений при коэффициенте перехода **β= β**$_{>}$:

$$x_{1>} = [x_{2>} + (V \cdot t_{2>})] / [1 - (V^2 / v_{xкр1}{}^2)]^{1/2} \quad (58)$$

$$x_{2>} = [x_{1>} - (V \cdot t_{1>})] / [1 - (V^2 / v_{xкр1}{}^2)]^{1/2} \quad (59)$$

$$t_{1>} = \{t_{2>} + [(V \cdot x_{2>}) / v_{xкр1}{}^2]\} / [(1 - V^2/v_{xкр1}{}^2)^{1/2}] \quad (60)$$

$$t_{2>} = \{t_{1>} - [(V \cdot x_{1>}) / v_{xкр1}{}^2]\} / [(1 - V^2/v_{xкр1}{}^2)^{1/2}] \quad (61)$$

$$v_{x1>} = (v_{x2>} + V) / \{1 + [(V \cdot v_{x2>}) / v_{xкр1}{}^2)]\} \quad (62)$$

$$v_{x2>} = (v_{x1>} - V) / \{1 - [(V \cdot v_{x1>}) / v_{xкр1}{}^2)]\} \quad (63)$$

$$v_{y1>} = \{v_{y2>} \cdot [1 - (V^2 / v_{xкр1}{}^2)]^{1/2}\} / \{1 + [(V \cdot v_{x2>}) / v_{xкр1}{}^2)]\} \quad (64)$$

$$v_{y2>} = \{v_{y1>} \cdot [1 - (V^2 / v_{xкр1}{}^2)]^{1/2}\} / \{1 - [(V \cdot v_{x1>}) / v_{xкр1}{}^2)]\} \quad (65)$$

$$v_{z1>} = \{v_{z2>} \cdot [1 - (V^2 / v_{xкр1}{}^2)]^{1/2}\} / \{1 + [(V \cdot v_{x2>}) / v_{xкр1}{}^2)]\} \quad (66)$$

$$v_{z2>} = \{v_{z1>} \cdot [1 - (V^2 / v_{xкр1}{}^2)]^{1/2}\} / \{1 - [(V \cdot v_{x1>}) / v_{xкр1}{}^2)]\} \quad (67)$$

$$a_{x1>} = \{a_{x2>} \cdot [1 - (V^2 / v_{xкр1}{}^2)]^{3/2}\} / \{1 + [(V \cdot v_{x2>}) / v_{xкр1}{}^2)]\}^3 \quad (68)$$

$$a_{x2>} = \{a_{x1>} \cdot [1 - (V^2 / v_{xкр1}{}^2)]^{3/2}\} / \{1 - [(V \cdot v_{x1>}) / v_{xкр1}{}^2)]\}^3 \quad (69)$$

$$a_{y1>} = \frac{[\{\{1+[(V \cdot v_{x2>})/v_{xкр1}{}^2)]\} \cdot a_{y2>}\} - [(V \cdot v_{y2>} \cdot a_{x2>})/v_{xкр1}{}^2]] \cdot [1 - (V^2/v_{xкр1}{}^2)]}{\{1 + [(V \cdot v_{x2>}) / v_{xкр1}{}^2)]\}^3} \quad (70)$$

$$a_{y2>} = \frac{[\{\{1-[(V \cdot v_{x1>})/v_{xкр1}{}^2)]\} \cdot a_{y1>}\} + [(V \cdot v_{y1>} \cdot a_{x1>})/v_{xкр1}{}^2]] \cdot [1 - (V^2/v_{xкр1}{}^2)]}{\{1 - [(V \cdot v_{x1>}) / v_{xкр1}{}^2)]\}^3} \quad (71)$$

$$a_{z1>} = \frac{[\{\{1+[(V \cdot v_{x2>})/v_{xкр1}{}^2)]\} \cdot a_{z2>}\} - [(V \cdot v_{z2>} \cdot a_{x2>})/v_{xкр1}{}^2]] \cdot [1 - (V^2/v_{xкр1}{}^2)]}{\{1 + [(V \cdot v_{x2>}) / v_{xкр1}{}^2)]\}^3} \quad (72)$$

$$a_{z2>} = \frac{[\{\{1-[(V \cdot v_{x1>})/v_{xкр1}{}^2)]\} \cdot a_{z1>}\} + [(V \cdot v_{z1>} \cdot a_{x1>})/v_{xкр1}{}^2]] \cdot [1 - (V^2/v_{xкр1}{}^2)]}{\{1 - [(V \cdot v_{x1>}) / v_{xкр1}{}^2)]\}^3} \quad (73)$$

6. Основные уравнения специальной теории относительности при 0 < β < 1

Подставив формулу (40) в уравнения (11), (12), (15)-:-(22) и (28)-:-(33), получим систему уравнений для случая когда коэффициент перехода **β = β**$_{<}$:

$$x_{1<} = [x_{2<} + (V \cdot t_{2<})] / [1 + (V^2 / v_{xкр2}{}^2)]^{1/2} \quad (74)$$

$$x_{2<} = [x_{1<} - (V \cdot t_{1<})] / [1 + (V^2 / v_{xкр2}{}^2)]^{1/2} \quad (75)$$

$$t_{1<} = \{t_{2<} - [(V \cdot x_{2<}) / v_{\text{хкр}2}^2]\} / [(1 + V^2/v_{\text{хкр}2}^2)^{1/2}] \qquad (76)$$

$$t_{2<} = \{t_{1<} + [(V \cdot x_{1<}) / v_{\text{хкр}2}^2]\} / [(1 + V^2/v_{\text{хкр}2}^2)^{1/2}] \qquad (77)$$

$$v_{x1<} = (v_{x2<} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{x2<}) / v_{\text{хкр}2}^2)]\} \qquad (78)$$

$$v_{x2<} = (v_{x1<} - V) / \{1 + [(V \cdot v_{x1<}) / v_{\text{хкр}2}^2)]\} \qquad (79)$$

$$v_{y1<} = \{v_{y2<} \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} / \{1 - [(V \cdot v_{x2<}) / v_{\text{хкр}2}^2)]\} \qquad (80)$$

$$v_{y2<} = \{v_{y1<} \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} / \{1 + [(V \cdot v_{x1<}) / v_{\text{хкр}2}^2)]\} \qquad (81)$$

$$v_{z1<} = \{v_{z2<} \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} / \{1 - [(V \cdot v_{x2<}) / v_{\text{хкр}2}^2)]\} \qquad (82)$$

$$v_{z2<} = \{v_{z1<} \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} / \{1 + [(V \cdot v_{x1<}) / v_{\text{хкр}2}^2)]\} \qquad (83)$$

$$a_{x1<} = \{a_{x2<} \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{3/2}\} / \{1 - [(V \cdot v_{x2<}) / v_{\text{хкр}2}^2)]\}^3 \qquad (84)$$

$$a_{x2<} = \{a_{x1<} \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{3/2}\} / \{1 + [(V \cdot v_{x1<}) / v_{\text{хкр}2}^2)]\}^3 \qquad (85)$$

$$a_{y1<} = \frac{[\{\{1-[(V\cdot v_{x2<})/v_{\text{хкр}2}^2)]\}\cdot a_{y2<}\}+[(V\cdot v_{y2<}\cdot a_{x2<})/v_{\text{хкр}2}^2]] \cdot [1 + (V^2/v_{\text{хкр}2}^2)]}{\{1 - [(V \cdot v_{x2<}) / v_{\text{хкр}2}^2)]\}^3} \qquad (86)$$

$$a_{y2<} = \frac{[\{\{1+[(V\cdot v_{x1<})/v_{\text{хкр}2}^2)]\}\cdot a_{y1<}\}-[(V\cdot v_{y1<}\cdot a_{x1<})/v_{\text{хкр}2}^2]] \cdot [1 + (V^2/v_{\text{хкр}2}^2)]}{\{1 + [(V \cdot v_{x1<}) / v_{\text{хкр}2}^2)]\}^3} \qquad (87)$$

$$a_{z1<} = \frac{[\{\{1-[(V\cdot v_{x2<})/v_{\text{хкр}2}^2)]\}\cdot a_{z2<}\}+[(V\cdot v_{z2<}\cdot a_{x2<})/v_{\text{хкр}2}^2]] \cdot [1 + (V^2/v_{\text{хкр}2}^2)]}{\{1 - [(V \cdot v_{x2<}) / v_{\text{хкр}2}^2)]\}^3} \qquad (88)$$

$$a_{z2<} = \frac{[\{\{1+[(V\cdot v_{x1<})/v_{\text{хкр}2}^2)]\}\cdot a_{z1<}\}-[(V\cdot v_{z1<}\cdot a_{x1<})/v_{\text{хкр}2}^2]] \cdot [1 + (V^2/v_{\text{хкр}2}^2)]}{\{1 + [(V \cdot v_{x1<}) / v_{\text{хкр}2}^2)]\}^3} \qquad (89)$$

7. Системы уравнений для определения зависимости массы движущегося тела от скорости

Воспользуемся принципом относительности, утверждающим, что физические законы инвариантны по отношению к выбору инерциальной системы отсчета, т.е. уравнения, выражающие эти законы, имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета.

Для определения зависимости массы движущегося тела от его скорости перемещения воспользуемся:

- законом сохранения импульса: **импульс замкнутой (на которую не действуют внешние силы) механической системы тел для любого**

момента времени являются величиной постоянной;

- и законом сохранения механической энергии, а точнее его частным случаем, когда тела, составляющие замкнутую механическую систему тел, испытывают только абсолютно упругое взаимодействие: **кинетическая энергия замкнутой механической системы тел, испытывающих абсолютно упругое взаимодействие, для любого момента времени является величиной постоянной.**

Далее предположим, что масса **M(V)** материальной точки, движущейся со скоростью **V**, равна:

$$M(V) = M_o \cdot f(V) \qquad (90)$$

где: $\mathbf{M_o}$ – масса рассматриваемой материальной точки в состоянии покоя;

f(V) – функция, предположительно зависящая от величины скорости **V**.

Исходя из формулы (90) импульс **P(V)** материальной точки, движущейся со скоростью **V**, равен:

$$P(V) = M_o \cdot f(V) \cdot V \qquad (91)$$

А формула (91) позволяет записать следующее уравнение для кинетической энергии $\mathbf{E_к(V)}$ материальной точки, движущейся со скоростью **V**:

$$E_к(V) = M_o \cdot \int_0^V \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \qquad (92)$$

где: **f′ (V) –** производная функции **f (V)** .

С целью написания системы уравнений, позволяющих определить значение функции **f (V)**, рассмотрим два простейших примера.

Пример № 1

Допустим, что имеются две инерциальные системы отсчета, аналогичные системам отсчета, изображенным на рис.1, неподвижная $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижная $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, которая бы двигалась со скоростью **V** параллельно оси $\mathbf{O_1x_1}$ относительно системы $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$.

Предположим, что имеется замкнутая механическая система тел, состоящая из тела 1 и тела 2, как показано на рис.3, имеющих массы в состоянии покоя, равные $\mathbf{M_{o1}}$ и $\mathbf{M_{o2}}$ соответственно.

В подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ тела 1 и тела 2 до некоторого момента времени $\mathbf{t_{2c}}$ двигались параллельно оси $\mathbf{O_2x_2}$ по одной линии с постоянными по величине скоростями $\mathbf{v_{21хн}}$ и $\mathbf{v_{22хн}}$ соответственно.

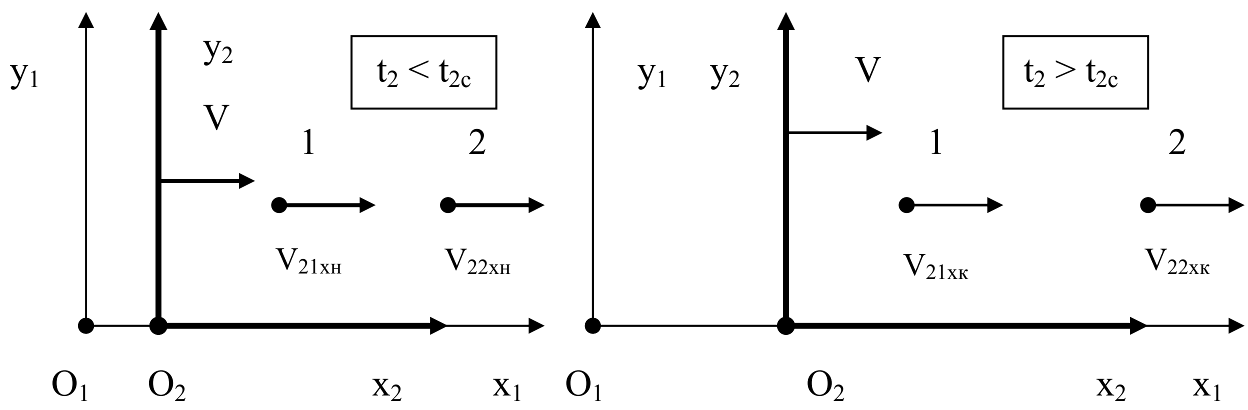

Рис. 3

В какой-то момент времени $\mathbf{t_{2c}}$ между телами 1 и 2 произошло абсолютно упругое прямое центральное столкновение.

Далее после столкновения в момент времени больший $\mathbf{t_{2c}}$ тела 1 и 2 двигаются параллельно оси $\mathbf{O_2x_2}$ по одной линии с постоянными по величине скоростями $\mathbf{v_{21хк}}$ и $\mathbf{v_{22хк}}$ соответственно.

Учитывая, что между телами 1 и 2 имело место прямое центральное столкновение и их можно рассматривать как материальные точки, запишем закон сохранения импульса для замкнутой механической системы тел 1 и 2 для моментов времени меньшего и большего чем $\mathbf{t_{2c}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

$$[M_{o1} \cdot f\,(V = v_{21хн}) \cdot v_{21хн}] + [M_{o2} \cdot f\,(V = v_{22хн}) \cdot v_{22хн}] = [M_{o1} \cdot f\,(V = v_{21хк}) \cdot v_{21хк}] + [M_{o2} \cdot f\,(V = v_{22хк}) \cdot v_{22хк}] \qquad (93)$$

А используя то, что столкновение тел 1 и 2 носило абсолютно упругий характер, можно записать закон сохранения кинетической энергии для замкнутой механической системы тел 1 и 2 для моментов времени меньшего и большего чем $\mathbf{t_{2c}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

$$\boldsymbol{\{}\, M_{o1}\cdot\int_0^{v_{21xн}}\{[f\,(V)\cdot V] + [f'\,(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}\, M_{o2}\cdot\int_0^{v_{22xн}}\{[f\,(V)\cdot V] + [f'\,(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\boldsymbol{\}} =$$

$$\boldsymbol{\{}\, M_{o1}\cdot\int_0^{v_{21xк}}\{[f\,(V)\cdot V] + [f'\,(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}\, M_{o2}\cdot\int_0^{v_{22xк}}\{[f\,(V)\cdot V] + [f'\,(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\boldsymbol{\}} \quad (94)$$

Все ранее сказанное о движении тел 1 и 2 в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ можно сказать и о движении тел 1 и 2 в неподвижной системе отчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$, за исключением того, что столкновение между телами 1 и 2 происходит в момент времени $\mathbf{t_{1c}}$, соответствующий моменту времени $\mathbf{t_{2c}}$ в системе $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, тело 1 имеет соответственно до и после столкновения скорости $\mathbf{v_{11xн}}$ и $\mathbf{v_{11xк}}$, соответствующие скоростям $\mathbf{v_{21xн}}$ и $\mathbf{v_{21xк}}$, а тело 2 имеет соответственно до и после столкновения скорости $\mathbf{v_{12xн}}$ и $\mathbf{v_{12xк}}$, соответствующие скоростям $\mathbf{v_{22xн}}$ и $\mathbf{v_{22xк}}$.

Аналогично формулам (93) и (94) можно записать закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии для замкнутой механической системы тел 1 и 2 для моментов времени меньшего и большего чем $\mathbf{t_{1c}}$ в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

$$[M_{o1}\cdot f\,(V= v_{11xн})\cdot v_{11xн}] + [M_{o2}\cdot f\,(V= v_{12xн})\cdot v_{12xн}] = [M_{o1}\cdot f\,(V= v_{11xк})\cdot v_{11xк}] + [M_{o2}\cdot f\,(V= v_{12xк})\cdot v_{12xк}] \quad (95)$$

$$\boldsymbol{\{}\, M_{o1}\cdot\int_0^{v_{11xн}}\{[f\,(V)\cdot V] + [f'\,(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}\, M_{o2}\cdot\int_0^{v_{12xн}}\{[f\,(V)\cdot V] + [f'\,(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\boldsymbol{\}} =$$

$$\boldsymbol{\{}\, M_{o1}\cdot\int_0^{v_{11xк}}\{[f\,(V)\cdot V] + [f'\,(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}\, M_{o2}\cdot\int_0^{v_{12xк}}\{[f\,(V)\cdot V] + [f'\,(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\boldsymbol{\}} \quad (96)$$

Пример № 2

Пример № 2 аналогичен примеру № 1 и отличается только тем, как показано на рис. 4, что в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ тела 1 и тела 2 двигаются не параллельно оси $\mathbf{O_2x_2}$, а параллельно оси $\mathbf{O_2y_2}$.

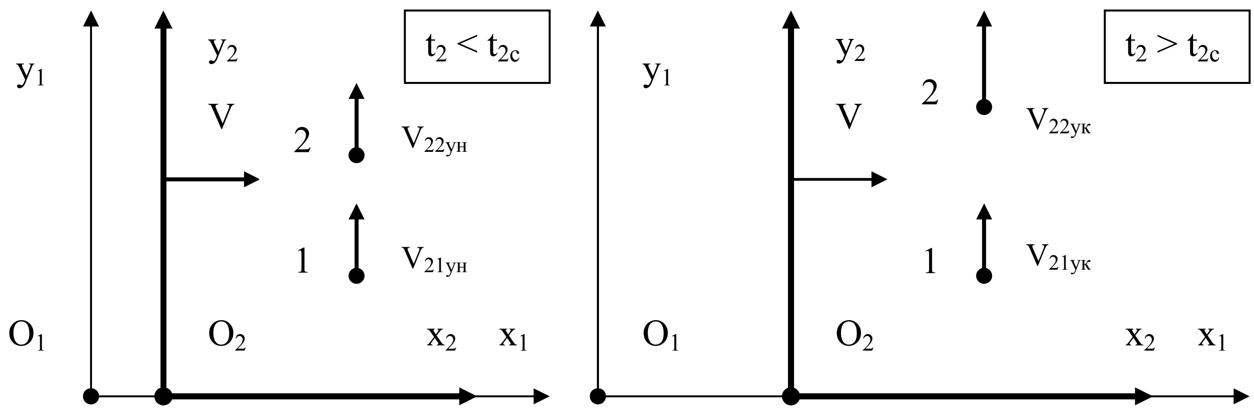

Рис. 4

В подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ тела 1 и тела 2 до некоторого момента времени $\mathbf{t_{2c}}$ двигались параллельно оси $\mathbf{O_2y_2}$ по одной линии с постоянными по величине скоростями $\mathbf{v_{21ун}}$ и $\mathbf{v_{22ун}}$ соответственно.

После столкновения в момент времени больший $\mathbf{t_{2c}}$ тела 1 и 2 двигаются параллельно оси $\mathbf{O_2y_2}$ по одной линии с постоянными по величине скоростями $\mathbf{v_{21ук}}$ и $\mathbf{v_{22ук}}$ соответственно.

Тогда можно записать закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии для замкнутой механической системы тел 1 и 2 для моментов времени меньшего и большего чем $\mathbf{t_{2c}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

$$[M_{o1} \cdot f\,(V = v_{21ун}) \cdot v_{21ун}] + [M_{o2} \cdot f\,(V = v_{22ун}) \cdot v_{22ун}] = [M_{o1} \cdot f\,(V = v_{21ук}) \cdot v_{21ук}] + [M_{o2} \cdot f\,(V = v_{22ук}) \cdot v_{22ук}] \qquad (97)$$

$$\boldsymbol{\{}\, M_{o1} \cdot \int_0^{v_{21ун}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}\, M_{o2} \cdot \int_0^{v_{22ун}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} =$$

$$\boldsymbol{\{}\, M_{o1} \cdot \int_0^{v_{21ук}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}\, M_{o2} \cdot \int_0^{v_{22ук}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} \qquad (98)$$

Аналогично можно записать закон сохранения импульса (два уравнения для проекций импульса на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$) и закон сохранения кинетической энергии для замкнутой механической системы тел 1 и 2 для моментов времени меньшего и большего чем $\mathbf{t_{1c}}$ в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

$$\{M_{o1} \cdot f\,[V = (v_{11ун}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} + \{M_{o2} \cdot f\,[V = (v_{12ун}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} =$$

$$\{M_{o1} \cdot f\,[V = (v_{11ук}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} + \{M_{o2} \cdot f\,[V = (v_{12ук}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} \qquad (99)$$

$$\{M_{o1} \cdot f\,[V = (v_{11ун}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{11ун}\} + \{M_{o2} \cdot f\,[V = (v_{12ун}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{12ун}\} =$$

$$\{M_{o1} \cdot f\,[V = (v_{11ук}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{11ук}\} + \{M_{o2} \cdot f\,[V = (v_{12ук}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{12ук}\} \qquad (100)$$

$$\boldsymbol{\{} M_{o1} \cdot \int_0^{(v_{11ун}{}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{} M_{o2} \cdot \int_0^{(v_{12ун}{}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} =$$

$$\boldsymbol{\{} M_{o1} \cdot \int_0^{(v_{11ук}{}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{} M_{o2} \cdot \int_0^{(v_{12ук}{}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} \qquad (101)$$

8. Формула массы движущегося тела при β > 1

С целью определения зависимости для массы движущегося тела при значении коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_{>}$ (т.е. $\boldsymbol{\beta} > \mathbf{1}$) составим следующую систему уравнений:

$$[M_{o1} \cdot f(V = v_{21хн}) \cdot v_{21хн}] + [M_{o2} \cdot f(V = v_{22хн}) \cdot v_{22хн}] = [M_{o1} \cdot f(V = v_{21хк}) \cdot v_{21хк}] + [M_{o2} \cdot f(V = v_{22хк}) \cdot v_{22хк}] \qquad (93)$$

$$\boldsymbol{\{} M_{o1} \cdot \int_0^{v_{21хн}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{} M_{o2} \cdot \int_0^{v_{22хн}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} =$$

$$\boldsymbol{\{} M_{o1} \cdot \int_0^{v_{21хк}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{} M_{o2} \cdot \int_0^{v_{22хк}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} \qquad (94)$$

$$[M_{o1} \cdot f(V = v_{11хн}) \cdot v_{11хн}] + [M_{o2} \cdot f(V = v_{12хн}) \cdot v_{12хн}] = [M_{o1} \cdot f(V = v_{11хк}) \cdot v_{11хк}] + [M_{o2} \cdot f(V = v_{12хк}) \cdot v_{12хк}] \qquad (95)$$

$$\boldsymbol{\{} M_{o1} \cdot \int_0^{v_{11хн}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{} M_{o2} \cdot \int_0^{v_{12хн}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} =$$

$$\boldsymbol{\{} M_{o1} \cdot \int_0^{v_{11хк}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{} M_{o2} \cdot \int_0^{v_{12хк}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} \qquad (96)$$

$$[M_{o1} \cdot f(V = v_{21ун}) \cdot v_{21ун}] + [M_{o2} \cdot f(V = v_{22ун}) \cdot v_{22ун}] = [M_{o1} \cdot f(V = v_{21ук}) \cdot v_{21ук}] + [M_{o2} \cdot f(V = v_{22ук}) \cdot v_{22ук}] \qquad (97)$$

$$\boldsymbol{\{} M_{o1} \cdot \int_0^{v_{21ун}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{} M_{o2} \cdot \int_0^{v_{22ун}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} =$$

$v_{21ук}$ $v_{22ук}$

$$\{ M_{o1}\cdot \int_0 \{[f(V)\cdot V] + [f'(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\} + \{ M_{o2}\cdot \int_0 \{[f(V)\cdot V] + [f'(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\} \quad (98)$$

$$\{M_{o1}\cdot f[V = (v_{11ун}{}^2 + V^2)^{1/2}]\cdot V\} + \{M_{o2}\cdot f[V = (v_{12ун}{}^2 + V^2)^{1/2}]\cdot V\} =$$

$$\{M_{o1}\cdot f[V = (v_{11ук}{}^2 + V^2)^{1/2}]\cdot V\} + \{M_{o2}\cdot f[V = (v_{12ук}{}^2 + V^2)^{1/2}]\cdot V\} \quad (99)$$

$$\{M_{o1}\cdot f[V = (v_{11ун}{}^2 + V^2)^{1/2}]\cdot v_{11ун}\} + \{M_{o2}\cdot f[V = (v_{12ун}{}^2 + V^2)^{1/2}]\cdot v_{12ун}\} =$$

$$\{M_{o1}\cdot f[V = (v_{11ук}{}^2 + V^2)^{1/2}]\cdot v_{11ук}\} + \{M_{o2}\cdot f[V = (v_{12ук}{}^2 + V^2)^{1/2}]\cdot v_{12ук}\} \quad (100)$$

$$\{ M_{o1}\cdot \int_0^{(v_{11ун}{}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V)\cdot V] + [f'(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\} + \{ M_{o2}\cdot \int_0^{(v_{12ун}{}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V)\cdot V] + [f'(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\} =$$

$$\{ M_{o1}\cdot \int_0^{(v_{11ук}{}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V)\cdot V] + [f'(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\} + \{ M_{o2}\cdot \int_0^{(v_{12ук}{}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V)\cdot V] + [f'(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\} \quad (101)$$

В эту систему уравнений нужно также добавить уравнения связи между проекциями скоростей тел 1 и 2 в подвижной $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ и неподвижной $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ системах отсчета, записанные исходя из формул (62) и (64):

$$v_{11хн} = (v_{21хн} + V) / \{1 + [(V\cdot v_{21хн}) / v_{хкр1}{}^2)]\} \quad (102)$$

$$v_{12хн} = (v_{22хн} + V) / \{1 + [(V\cdot v_{22хн}) / v_{хкр1}{}^2)]\} \quad (103)$$

$$v_{11хк} = (v_{21хк} + V) / \{1 + [(V\cdot v_{21хк}) / v_{хкр1}{}^2)]\} \quad (104)$$

$$v_{12хк} = (v_{22хк} + V) / \{1 + [(V\cdot v_{22хк}) / v_{хкр1}{}^2)]\} \quad (105)$$

$$v_{11ун} = v_{21ун}\cdot [1 - (V^2 / v_{хкр1}{}^2)]^{1/2} \quad (106)$$

$$v_{12ун} = v_{22ун}\cdot [1 - (V^2 / v_{хкр1}{}^2)]^{1/2} \quad (107)$$

$$v_{11ук} = v_{21ук}\cdot [1 - (V^2 / v_{хкр1}{}^2)]^{1/2} \quad (108)$$

$$v_{12ук} = v_{22ук}\cdot [1 - (V^2 / v_{хкр1}{}^2)]^{1/2} \quad (109)$$

Для рассмотрения имеется 17 уравнений, 12 неизвестных значения и одна неизвестная функция.

Единственной функцией способной удовлетворить всем требованиям 17 уравнений является:

$$f(V)_{>} = 1 / [1 - (V^2 / v_{хкр1}{}^2)]^{1/2} \quad (110)$$

Тогда с учетом уравнений (90) -:- (92) можно записать зависимости для массы $\mathbf{M(V)_{>}}$, импульса $\mathbf{P(V)_{>}}$ и кинетической энергии $\mathbf{E_к(V)_{>}}$ движущегося тела со скоростью $\mathbf{V}$ в случае, когда коэффициент перехода $\boldsymbol{\beta > 1}$:

$$M(V)_{>} = M_o / [1 - (V^2 / v_{хкр1}{}^2)]^{1/2} \quad (111)$$

$$P(V)_{>} = (M_o \cdot V) / [1 - (V^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2} \qquad (112)$$

$$E_к(V)_{>} = M_o \cdot v_{хкр1}^2 \cdot \{\{1 / [1 - (V^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} - 1\} \qquad (113)$$

9. Проверка правильности выбора формулы (110) при β>1 (для примеров № 1 и № 2)

С начала перепишем формулы (93) -:- (109) с учетом формул (111) -:- (113):

$$\{(M_{o1} \cdot v_{21хн}) / [1 - (v_{21хн}^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{o2} \cdot v_{22хн}) / [1 - (v_{22хн}^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} = \{(M_{o1} \cdot v_{21хк}) / [1 - (v_{21хк}^2/v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{o2} \cdot v_{22хк}) / [1 - (v_{22хк}^2/v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} \quad (114)$$

$$\{M_{o1} / [1 - (v_{21хн}^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} + \{M_{o2} / [1 - (v_{22хн}^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} = \{M_{o1} / [1 - (v_{21хк}^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} + \{M_{o2} / [1 - (v_{22хк}^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} \quad (115)$$

$$\{(M_{o1} \cdot v_{11хн}) / [1 - (v_{11хн}^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{o2} \cdot v_{12хн}) / [1 - (v_{12хн}^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} = \{(M_{o1} \cdot v_{11хк})/[1 - (v_{21хк}^2/v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{o2} \cdot v_{12хк})/[1 - (v_{12хк}^2/v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} \quad (116)$$

$$\{M_{o1} / [1 - (v_{11хн}^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} + \{M_{o2} / [1 - (v_{12хн}^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} = \{M_{o1} / [1 - (v_{21хк}^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} + \{M_{o2} / [1 - (v_{12хк}^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} \quad (117)$$

$$\{(M_{o1} \cdot v_{21ун}) / [1 - (v_{21ун}^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{o2} \cdot v_{22ун}) / [1 - (v_{22ун}^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} = \{(M_{o1} \cdot v_{21ук}) / [1 - (v_{21ук}^2/v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{o2} \cdot v_{22ук}) / [1 - (v_{22ук}^2/v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} \quad (118)$$

$$\{M_{o1} / [1 - (v_{21ун}^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} + \{M_{o2} / [1 - (v_{22ун}^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} = \{M_{o1} / [1 - (v_{21ук}^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} + \{M_{o2} / [1 - (v_{22ук}^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} \quad (119)$$

$$\boldsymbol{\{}(M_{o1} \cdot V)/\{1 - [(v_{11ун}^2+V^2)/v_{хкр1}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}(M_{o2} \cdot V)/\{1 - [(v_{12ун}^2+V^2)/v_{хкр1}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} = \boldsymbol{\{}(M_{o1} \cdot V)/\{1 - [(v_{11ук}^2+V^2)/v_{хкр1}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}(M_{o2} \cdot V)/\{1 - [(v_{12ук}^2+V^2)/v_{хкр1}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} \quad (120)$$

$$\boldsymbol{\{}(M_{o1} \cdot v_{11ун})/\{1 - [(v_{11ун}^2+V^2)/v_{хкр1}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}(M_{o2} \cdot v_{12ун})/\{1 - [(v_{12ун}^2+V^2)/v_{хкр1}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} = \boldsymbol{\{}(M_{o1} \cdot v_{11ук})/\{1 - [(v_{11ук}^2+V^2)/v_{хкр1}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}(M_{o2} \cdot v_{12ук})/\{1 - [(v_{12ук}^2+V^2)/v_{хкр1}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} \quad (121)$$

$$\boldsymbol{\{}M_{o1} /\{1 - [(v_{11ун}^2 + V^2)/ v_{хкр1}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}M_{o2} /\{1 - [(v_{12ун}^2 + V^2)/ v_{хкр1}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} = \boldsymbol{\{}M_{o1} / \{1 - [(v_{11ук}^2+V^2)/ v_{хкр1}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}M_{o2} /\{1 - [(v_{12ук}^2+V^2)/ v_{хкр1}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} \quad (122)$$

Где:

$$v_{11хн} = (v_{21хн} + V) / \{1 + [(V \cdot v_{21хн}) / v_{хкр1}^2)]\} \qquad (102)$$

$$v_{12хн} = (v_{22хн} + V) / \{1 + [(V \cdot v_{22хн}) / v_{хкр1}^2)]\} \qquad (103)$$

$$v_{11хк} = (v_{21хк} + V) / \{1 + [(V \cdot v_{21хк}) / v_{хкр1}^2)]\} \qquad (104)$$

$$v_{12хк} = (v_{22хк} + V) / \{1 + [(V \cdot v_{22хк}) / v_{хкр1}^2)]\} \qquad (105)$$

$$v_{11ун} = v_{21ун} \cdot [1 - (V^2 / v_{xкр1}{}^2)]^{1/2} \qquad (106)$$

$$v_{12ун} = v_{22ун} \cdot [1 - (V^2 / v_{xкр1}{}^2)]^{1/2} \qquad (107)$$

$$v_{11ук} = v_{21ук} \cdot [1 - (V^2 / v_{xкр1}{}^2)]^{1/2} \qquad (108)$$

$$v_{12ук} = v_{22ук} \cdot [1 - (V^2 / v_{xкр1}{}^2)]^{1/2} \qquad (109)$$

Предположим, что $\mathbf{M_{o1}} = 1$, $\mathbf{M_{o2}} = 0,5$, $\mathbf{V} / \mathbf{v_{xкр1}} = 0,5$, $\mathbf{v_{21xн}} / \mathbf{v_{xкр1}} = \mathbf{v_{21ун}} / \mathbf{v_{xкр1}} = 0,9$, $\mathbf{v_{22xн}} / \mathbf{v_{x\ кр1}} = \mathbf{v_{22ун}} / \mathbf{v_{xкр1}} = 0,6$.

Тогда числовые расчеты дают следующие результаты для примера № 1:

I) в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

1) тело 1 имело:

а) до столкновения скорость $\mathbf{v_{21xн}} / \mathbf{v_{xкр1}} = 0,9$, массу $\mathbf{M_{21н}} = 2,294157338706$, импульс $\mathbf{P_{21н}} / \mathbf{v_{xкр1}} = 2,064741604835$, кинетическую энергию $\mathbf{E_{к21н}} / \mathbf{v_{xкр1}}^{\mathbf{2}} = 1,294157338706$;

б) после столкновения $\mathbf{v_{21xк}} / \mathbf{v_{xкр1}} = 0,7360143377$, $\mathbf{M_{21к}} = 1,477179174242$, $\mathbf{P_{21к}} / \mathbf{v_{xкр1}} = 1,087225051595$, $\mathbf{E_{к21к}} / \mathbf{v_{xкр1}}^{\mathbf{2}} = 0,477179174242$;

2) тело 2 имело:

а) до столкновения $\mathbf{v_{22xн}} / \mathbf{v_{xкр1}} = 0,6$, $\mathbf{M_{22н}} = 0,625$, $\mathbf{P_{22н}} / \mathbf{v_{xкр1}} = 0,375$, $\mathbf{E_{к22н}} / \mathbf{v_{xкр1}}^{\mathbf{2}} = 0,125$;

б) после столкновения $\mathbf{v_{22xк}} / \mathbf{v_{xкр1}} = 0,937959108239$, $\mathbf{M_{22к}} = 1,441978164463$, $\mathbf{P_{22к}} / \mathbf{v_{xкр1}} = 1,35251655324$, $\mathbf{E_{к22к}} / \mathbf{v_{xкр1}}^{\mathbf{2}} = 0,941978164463$;

3) система тел 1 и 2 имело:

а) до столкновения массу $(\mathbf{M_{21н}} + \mathbf{M_{22н}}) = 2,919157338706$, импульс $(\mathbf{P_{21н}} + \mathbf{P_{22н}}) / \mathbf{v_{xкр1}} = 2,439741604835$, кинетическую энергию $(\mathbf{E_{к21н}} + \mathbf{E_{к22н}}) / \mathbf{v_{xкр1}}^{\mathbf{2}} = 1,419157338706$;

б) после столкновения массу $(\mathbf{M_{21к}} + \mathbf{M_{22к}}) = 2,919157338706$, импульс $(\mathbf{P_{21к}} + \mathbf{P_{22к}}) / \mathbf{v_{xкр1}} = 2,439741604835$, кинетическую энергию $(\mathbf{E_{к21к}} + \mathbf{E_{к22к}}) / \mathbf{v_{xкр1}}^{\mathbf{2}} = 1,419157338706$;

II) в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

1) тело 1 имело:

а) до столкновения $\mathbf{v_{11xн}} / \mathbf{v_{xкр1}} = 0,965517241379$, массу $\mathbf{M_{11н}} = 3,841143835489$, импульс $\mathbf{P_{11н}} / \mathbf{v_{xкр1}} = 3,708690599782$, кинетическую энергию $\mathbf{E}_{\kappa 11н} / \mathbf{v}_{xкр1}^2 = 2{,}841143835489$;

б) после столкновения $\mathbf{v}_{11xк} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0{,}903514517939$, $\mathbf{M}_{11к} = 2{,}333409263988$, $\mathbf{P}_{11к} / \mathbf{v}_{xкр1} = 2{,}108269146306$, $\mathbf{E}_{к11к} / \mathbf{v}_{xкр1}^2 = 1{,}333409263988$;

2) тело 2 имело:

а) до столкновения $\mathbf{v}_{12xн} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0{,}846153846154$, $\mathbf{M}_{12н} = 0{,}938194187433$, $\mathbf{P}_{12н} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0{,}793856620136$, $\mathbf{E}_{к12н} / \mathbf{v}_{xкр1}^2 = 0{,}438194187433$;

б) после столкновения $\mathbf{v}_{12xк} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0{,}978882996844$, $\mathbf{M}_{12к} = 2{,}445928758933$, $\mathbf{P}_{12к} / \mathbf{v}_{xкр1} = 2{,}394278073612$, $\mathbf{E}_{к12к} / \mathbf{v}_{xкр1}^2 = 1{,}945928758933$;

3) система тел 1 и 2 имело:

а) до столкновения массу $(\mathbf{M}_{11н} + \mathbf{M}_{12н}) = 4{,}779338022922$, импульс $(\mathbf{P}_{11н} + \mathbf{P}_{12н}) / \mathbf{v}_{xкр1} = 4{,}502547219918$, кинетическую энергию $(\mathbf{E}_{к11н} + \mathbf{E}_{к12н}) / \mathbf{v}_{xкр1}^2 = 3{,}279338022922$;

б) после столкновения массу $(\mathbf{M}_{11к} + \mathbf{M}_{12к}) = 4{,}779338022922$, импульс $(\mathbf{P}_{11к} + \mathbf{P}_{12к}) / \mathbf{v}_{xкр1} = 4{,}502547219918$, кинетическую энергию $(\mathbf{E}_{к11к} + \mathbf{E}_{к12к}) / \mathbf{v}_{xкр1}^2 = 3{,}279338022922$.

Для примера № 2 числовые расчеты дают следующие результаты:

I) в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

1) тело 1 имело:

а) до столкновения скорость $\mathbf{v}_{21yн} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0{,}9$, массу $\mathbf{M}_{21н} = 2{,}294157338706$, импульс $\mathbf{P}_{21н} / \mathbf{v}_{xкр1} = 2{,}064741604835$, кинетическую энергию $\mathbf{E}_{к21н} / \mathbf{v}_{xкр1}^2 = 1{,}294157338706$;

б) после столкновения $\mathbf{v}_{21yк} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0{,}7360143377$, $\mathbf{M}_{21к} = 1{,}477179174242$, $\mathbf{P}_{21к} / \mathbf{v}_{xкр1} = 1{,}087225051595$, $\mathbf{E}_{к21к} / \mathbf{v}_{xкр1}^2 = 0{,}477179174242$;

2) тело 2 имело:

а) до столкновения $\mathbf{v}_{22yн} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0{,}6$, $\mathbf{M}_{22н} = 0{,}625$, $\mathbf{P}_{22н} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0{,}375$, $\mathbf{E}_{к22н} / \mathbf{v}_{xкр1}^2 = 0{,}125$;

б) после столкновения $\mathbf{v}_{22yк} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0{,}937959108239$, $\mathbf{M}_{22к} = 1{,}441978164463$, $\mathbf{P}_{22к} / \mathbf{v}_{xкр1} = 1{,}35251655324$, $\mathbf{E}_{к22к} / \mathbf{v}_{xкр1}^2 = 0{,}941978164463$;

3) система тел 1 и 2 имело:

а) до столкновения массу $(\mathbf{M}_{21н} + \mathbf{M}_{22н}) = 2{,}919157338706$, импульс

$(\mathbf{P}_{21н} + \mathbf{P}_{22н}) / \mathbf{v}_{xкр1} = 2{,}439741604835$, кинетическую энергию $(\mathbf{E}_{к21н} + \mathbf{E}_{к22н}) / \mathbf{v}_{xкр1}^2 = 1{,}419157338706$;

б) после столкновения массу $(\mathbf{M}_{21к} + \mathbf{M}_{22к}) = 2{,}919157338706$, импульс $(\mathbf{P}_{21к} + \mathbf{P}_{22к}) / \mathbf{v}_{xкр1} = 2{,}439741604835$, кинетическую энергию $(\mathbf{E}_{к21к} + \mathbf{E}_{к22к}) / \mathbf{v}_{xкр1}^2 = 1{,}419157338706$;

II) в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

1) тело 1 имело:

а) до столкновения $\mathbf{v}_{11xн} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0{,}5$, $\mathbf{v}_{11yн} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0{,}779422863406$, массу $\mathbf{M}_{11н} = 2{,}64906471413$, проекции импульса $\mathbf{P}_{11xн} / \mathbf{v}_{xкр1} = 1{,}324532357065$ и $\mathbf{P}_{11yн} / \mathbf{v}_{xкр1} = 2{,}064741604835$, кинетическую энергию $\mathbf{E}_{к11н} / \mathbf{v}_{xкр1}^2 = 1{,}64906471413$;

б) после столкновения $\mathbf{v}_{11xк} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0{,}5$, $\mathbf{v}_{11yк} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0{,}637407113998$, $\mathbf{M}_{11к} = 1{,}70569958778$, $\mathbf{P}_{11xк} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0{,}85284979389$, $\mathbf{P}_{11yк} / \mathbf{v}_{xкр1} = 1{,}087225051595$, $\mathbf{E}_{к11к} / \mathbf{v}_{xкр1}^2 = 0{,}70569958778$;

2) тело 2 имело:

а) до столкновения $\mathbf{v}_{12xн} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0{,}5$, $\mathbf{v}_{12yн} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0{,}519615242271$, $\mathbf{M}_{12н} = 0{,}721687836487$, $\mathbf{P}_{12xн} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0{,}360843918244$, $\mathbf{P}_{12yн} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0{,}375$, $\mathbf{E}_{к12н} / \mathbf{v}_{xкр1}^2 = 0{,}221687836487$;

б) после столкновения $\mathbf{v}_{12xк} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0{,}5$, $\mathbf{v}_{12yк} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0{,}812296415446$, $\mathbf{M}_{12к} = 1{,}665052962837$, $\mathbf{P}_{12xк} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0{,}832526481418$, $\mathbf{P}_{12yк} / \mathbf{v}_{xкр1} = 1{,}35251655324$, $\mathbf{E}_{к12к} / \mathbf{v}_{xкр1}^2 = 1{,}165052962837$;

3) система тел 1 и 2 имело:

а) до столкновения массу $(\mathbf{M}_{11н} + \mathbf{M}_{12н}) = 3{,}370752550617$, проекции импульса $(\mathbf{P}_{11xн} + \mathbf{P}_{12xн}) / \mathbf{v}_{xкр1} = 1{,}685376275309$ и $(\mathbf{P}_{11yн} + \mathbf{P}_{12yн}) / \mathbf{v}_{xкр1} = 2{,}439741604835$, кинетическую энергию $(\mathbf{E}_{к11н} + \mathbf{E}_{к12н}) / \mathbf{v}_{xкр1}^2 = 1{,}870752550617$;

б) после столкновения массу $(\mathbf{M}_{11к} + \mathbf{M}_{12к}) = 3{,}370752550617$, проекции импульса $(\mathbf{P}_{11xк} + \mathbf{P}_{12xк}) / \mathbf{v}_{xкр1} = 1{,}685376275309$ и $(\mathbf{P}_{11yк} + \mathbf{P}_{12yк}) / \mathbf{v}_{xкр1} = 2{,}439741604835$, кинетическую энергию $(\mathbf{E}_{к11к} + \mathbf{E}_{к12к}) / \mathbf{v}_{xкр1}^2 = 1{,}870752550617$.

По результатам расчета можно сделать следующий вывод: в примерах № 1 и № 2 в системах отсчета подвижной $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ и неподвижной $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ до и после столкновения масса, импульс и кинетическая энергия механической системы тел 1 и 2 остаются неизменными.

Следовательно формулы (111)-:-(113), написанные для случая когда коэффициент перехода $\boldsymbol{\beta} > \mathbf{1}$, удовлетворяют требованиям системы уравнений (93)-:-(101).

10. Формула массы движущегося тела при 0 < β < 1

С целью определения зависимости для массы движущегося тела при значении коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_<$ (т.е. при $\mathbf{0} < \boldsymbol{\beta} < \mathbf{1}$) составим следующую систему уравнений:

$$[M_{o1} \cdot f\,(V = v_{21xн}) \cdot v_{21xн}] + [M_{o2} \cdot f\,(V = v_{22xн}) \cdot v_{22xн}] = [M_{o1} \cdot f\,(V = v_{21xк}) \cdot v_{21xк}] + [M_{o2} \cdot f\,(V = v_{22xк}) \cdot v_{22xк}] \qquad (93)$$

$$\boldsymbol{\{} M_{o1} \cdot \int_0^{v_{21xн}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{} M_{o2} \cdot \int_0^{v_{22xн}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} =$$

$$\boldsymbol{\{} M_{o1} \cdot \int_0^{v_{21xк}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{} M_{o2} \cdot \int_0^{v_{22xк}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} \qquad (94)$$

$$[M_{o1} \cdot f\,(V = v_{11xн}) \cdot v_{11xн}] + [M_{o2} \cdot f\,(V = v_{12xн}) \cdot v_{12xн}] = [M_{o1} \cdot f\,(V = v_{11xк}) \cdot v_{11xк}] + [M_{o2} \cdot f\,(V = v_{12xк}) \cdot v_{12xк}] \qquad (95)$$

$$\boldsymbol{\{} M_{o1} \cdot \int_0^{v_{11xн}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{} M_{o2} \cdot \int_0^{v_{12xн}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} =$$

$$\boldsymbol{\{} M_{o1} \cdot \int_0^{v_{11xк}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{} M_{o2} \cdot \int_0^{v_{12xк}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} \qquad (96)$$

$$[M_{o1} \cdot f\,(V = v_{21yн}) \cdot v_{21yн}] + [M_{o2} \cdot f\,(V = v_{22yн}) \cdot v_{22yн}] = [M_{o1} \cdot f\,(V = v_{21yк}) \cdot v_{21yк}] + [M_{o2} \cdot f\,(V = v_{22yк}) \cdot v_{22yк}] \qquad (97)$$

$$\boldsymbol{\{} M_{o1} \cdot \int_0^{v_{21yн}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{} M_{o2} \cdot \int_0^{v_{22yн}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} =$$

$$\boldsymbol{\{} M_{o1} \cdot \int_0^{v_{21yк}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{} M_{o2} \cdot \int_0^{v_{22yк}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} \qquad (98)$$

$$\{M_{o1} \cdot f\,[V = (v_{11yн}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} + \{M_{o2} \cdot f\,[V = (v_{12yн}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} =$$

$$\{M_{o1} \cdot f\,[V = (v_{11yк}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} + \{M_{o2} \cdot f\,[V = (v_{12yк}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} \quad (99)$$

$$\{M_{o1} \cdot f\,[V = (v_{11yн}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{11yн}\} + \{M_{o2} \cdot f\,[V = (v_{12yн}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{12yн}\} =$$

$$\{M_{o1} \cdot f\,[V = (v_{11yк}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{11yк}\} + \{M_{o2} \cdot f\,[V = (v_{12yк}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{12yк}\} \quad (100)$$

$$\Big\{ M_{o1} \cdot \int_0^{(v_{11yн}{}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \Big\} + \Big\{ M_{o2} \cdot \int_0^{(v_{12yн}{}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \Big\} =$$

$$\Big\{ M_{o1} \cdot \int_0^{(v_{11yк}{}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \Big\} + \Big\{ M_{o2} \cdot \int_0^{(v_{12yк}{}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \Big\} \quad (101)$$

В эту систему уравнений нужно также добавить уравнения связи между скоростями в подвижной $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ и неподвижной $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ системах отсчета, записанные исходя из формул (78) и (80):

$$v_{11xн} = (v_{21xн} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{21xн}) / v_{xкр2}{}^2)]\} \quad (123)$$

$$v_{12xн} = (v_{22xн} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{22xн}) / v_{xкр2}{}^2)]\} \quad (124)$$

$$v_{11xк} = (v_{21xк} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{21xк}) / v_{xкр2}{}^2)]\} \quad (125)$$

$$v_{12xк} = (v_{22xк} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{22xк}) / v_{xкр2}{}^2)]\} \quad (126)$$

$$v_{11yн} = v_{21yн} \cdot [1 + (V^2 / v_{xкр2}{}^2)]^{1/2} \quad (127)$$

$$v_{12yн} = v_{22yн} \cdot [1 + (V^2 / v_{xкр2}{}^2)]^{1/2} \quad (128)$$

$$v_{11yк} = v_{21yк} \cdot [1 + (V^2 / v_{xкр2}{}^2)]^{1/2} \quad (129)$$

$$v_{12yк} = v_{22yк} \cdot [1 + (V^2 / v_{xкр2}{}^2)]^{1/2} \quad (130)$$

Для рассмотрения имеется 17 уравнений, 12 неизвестных значения и одна неизвестная функция.

Единственной функцией способной удовлетворить всем требованиям 17 уравнений является:

$$f(V)_< = 1 / [1 + (V^2 / v_{xкр2}{}^2)]^{1/2} \quad (131)$$

Тогда с учетом уравнений (90)-:-(92) можно записать зависимости для массы $\mathbf{M(V)_<}$, импульса $\mathbf{P(V)_<}$ и кинетической энергии $\mathbf{E_к(V)_<}$ движущегося тела со скоростью $\mathbf{V}$ в случае, когда коэффициент перехода $\mathbf{0 < \beta < 1}$:

$$M(V)_< = M_o / [1 + (V^2 / v_{xкр2}{}^2)]^{1/2} \quad (132)$$

$$P(V)_< = (M_o \cdot V) / [1 + (V^2 / v_{xкр2}{}^2)]^{1/2} \quad (133)$$

$$E_к(V)_< = M_o \cdot v_{xкр2}{}^2 \cdot \Big\{ 1 - \{1 / [1 + (V^2 / v_{xкр2}{}^2)]^{1/2}\} \Big\} \quad (134)$$

11. Проверка правильности выбора формулы (131) при $0 < \beta < 1$ (для примеров № 1 и № 2)

С начала перепишем формулы (93)-:-(101) с учетом формул (132)-:-(134):

$$\{(M_{o1} \cdot v_{21хн}) / [1 + (v_{21хн}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{o2} \cdot v_{22хн}) / [1 + (v_{22хн}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} = \{(M_{o1} \cdot v_{21хк})/[1 + (v_{21хк}^2/v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{o2} \cdot v_{22хк})/[1 + (v_{22хк}^2/v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} \quad (135)$$

$$\{M_{o1} / [1 + (v_{21хн}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} + \{M_{o2} / [1 + (v_{22хн}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} = \{M_{o1} / [1 + (v_{21хк}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} + \{M_{o2} / [1 + (v_{22хк}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} \quad (136)$$

$$\{(M_{o1} \cdot v_{11хн}) / [1 + (v_{11хн}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{o2} \cdot v_{12хн}) / [1 + (v_{12хн}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} = \{(M_{o1} \cdot v_{11хк})/[1 + (v_{21хк}^2/v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{o2} \cdot v_{12хк})/[1 + (v_{12хк}^2/v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} \quad (137)$$

$$\{M_{o1} / [1 + (v_{11хн}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} + \{M_{o2} / [1 + (v_{12хн}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} = \{M_{o1} / [1 + (v_{21хк}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} + \{M_{o2} / [1 + (v_{12хк}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} \quad (138)$$

$$\{(M_{o1} \cdot v_{21ун}) / [1 + (v_{21ун}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{o2} \cdot v_{22ун}) / [1 + (v_{22ун}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} = \{(M_{o1} \cdot v_{21ук}) / [1 + (v_{21ук}^2/v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{o2} \cdot v_{22ук}) / [1 + (v_{22ук}^2/v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} \quad (139)$$

$$\{M_{o1} / [1 + (v_{21ун}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} + \{M_{o2} / [1 + (v_{22ун}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} = \{M_{o1} / [1 + (v_{21ук}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} + \{M_{o2} / [1 + (v_{22ук}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} \quad (140)$$

$$\boldsymbol{\{}(M_{o1} \cdot V)/\{1 + [(v_{11ун}^2+V^2)/v_{xкр2}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}(M_{o2} \cdot V)/\{1 + [(v_{12ун}^2+V^2)/v_{xкр2}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} = \boldsymbol{\{}(M_{o1} \cdot V)/\{1 + [(v_{11ук}^2+V^2)/v_{xкр2}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}(M_{o2} \cdot V)/\{1 + [(v_{12ук}^2+V^2)/v_{xкр2}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} \quad (141)$$

$$\boldsymbol{\{}(M_{o1} \cdot v_{11ун})/\{1+[(v_{11ун}^2+V^2)/v_{xкр2}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}(M_{o2} \cdot v_{12ун})/\{1+ [(v_{12ун}^2+V^2)/v_{xкр2}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} = \boldsymbol{\{}(M_{o1} \cdot v_{11ук})/\{1+[(v_{11ук}^2+V^2)/v_{xкр2}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}(M_{o2} \cdot v_{12ук})/\{1+[(v_{12ук}^2+V^2)/v_{xкр2}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} \quad (142)$$

$$\boldsymbol{\{}M_{o1} /\{1 + [(v_{11ун}^2 + V^2)/ v_{xкр2}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}M_{o2} /\{1 + [(v_{12ун}^2+ V^2)/ v_{xкр2}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} = \boldsymbol{\{}M_{o1} / \{1 + [(v_{11ук}^2+V^2)/ v_{xкр2}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}M_{o2} /\{1 + [(v_{12ук}^2+V^2)/ v_{xкр2}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} \quad (143)$$

Где:

$$v_{11хн} = (v_{21хн} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{21хн}) / v_{xкр2}^2)]\} \quad (123)$$

$$v_{12хн} = (v_{22хн} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{22хн}) / v_{xкр2}^2)]\} \quad (124)$$

$$v_{11хк} = (v_{21хк} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{21хк}) / v_{xкр2}^2)]\} \quad (125)$$

$$v_{12хк} = (v_{22хк} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{22хк}) / v_{xкр2}^2)]\} \quad (126)$$

$$v_{11ун} = v_{21ун} \cdot [1 + (V^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2} \quad (127)$$

$$v_{12ун} = v_{22ун} \cdot [1 + (V^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2} \quad (128)$$

$$v_{11ук} = v_{21ук} \cdot [1 + (V^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2} \quad (129)$$

$$v_{12ук} = v_{22ук} \cdot [1 + (V^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2} \qquad (130)$$

Предположим, что $\mathbf{M_{o1}} = 1$, $\mathbf{M_{o2}} = 0,5$, $\mathbf{V} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0,5$, $\mathbf{v_{21хн}} / \mathbf{v_{хкр2}} = \mathbf{v_{21ун}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0,9$, $\mathbf{v_{22хн}} / \mathbf{v_{хкр2}} = \mathbf{v_{22ун}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0,6$.

Тогда числовые расчеты дают следующие результаты для примера № 1:

I) в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

1) тело 1 имело:

а) до столкновения скорость $\mathbf{v_{21хн}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0,9$, массу $\mathbf{M_{21н}} = 0,743294146247$, импульс $\mathbf{P_{21н}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0,668964731622$, кинетическую энергию $\mathbf{E_{к21н}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2 = 0,256705853753$;

б) после столкновения $\mathbf{v_{21хк}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0,691099932748$, $\mathbf{M_{21к}} = 0,822656908881$, $\mathbf{P_{21к}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0,568538134403$, $\mathbf{E_{к21к}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2 = 0,177343091119$;

2) тело 2 имело:

а) до столкновения $\mathbf{v_{22хн}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0,6$, $\mathbf{M_{22н}} = 0,428746462856$, $\mathbf{P_{22н}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0,257247877714$, $\mathbf{E_{к22н}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2 = 0,071253537144$;

б) после столкновения $\mathbf{v_{22хк}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 1,023729712365$, $\mathbf{M_{22к}} = 0,349383700222$, $\mathbf{P_{22к}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0,357674474934$, $\mathbf{E_{к22к}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2 = 0,150616299778$;

3) система тел 1 и 2 имело:

а) до столкновения массу $(\mathbf{M_{21н}} + \mathbf{M_{22н}}) = 1,172040609103$, импульс $(\mathbf{P_{21н}} + \mathbf{P_{22н}}) / \mathbf{v_{хкр2}} = 0,926212609336$, кинетическую энергию $(\mathbf{E_{к21н}} + \mathbf{E_{к22н}}) / \mathbf{v_{хкр2}}^2 = 0,327959390897$;

б) после столкновения массу $(\mathbf{M_{21к}} + \mathbf{M_{22к}}) = 1,172040609103$, импульс $(\mathbf{P_{21к}} + \mathbf{P_{22к}}) / \mathbf{v_{хкр2}} = 0,926212609336$, кинетическую энергию $(\mathbf{E_{к21к}} + \mathbf{E_{к22к}}) / \mathbf{v_{хкр2}}^2 = 0,327959390897$;

II) в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

1) тело 1 имело:

а) до столкновения $\mathbf{v_{11хн}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 2,545454545455$, массу $\mathbf{M_{11н}} = 0,365652372423$, импульс $\mathbf{P_{11н}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0,93075149344$, кинетическую энергию $\mathbf{E_{к11н}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2 = 0,634347627577$;

б) после столкновения $\mathbf{v_{11хк}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 1,820001331727$, $\mathbf{M_{11к}} = 0,481548724902$, $\mathbf{P_{11к}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0,876419320614$, $\mathbf{E_{к11к}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2 = 0,518451275098$;

2) тело 2 имело:

а) до столкновения $\mathbf{v_{12хн}} / \mathbf{v_{хкр2}}$ = 1,571428571429 , $\mathbf{M_{12н}}$ = 0,268437746097 , $\mathbf{P_{12н}} / \mathbf{v_{хкр2}}$ = 0,421830743866 , $\mathbf{E_{к12н}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2$ = 0,231562253903 ;

б) после столкновения $\mathbf{v_{12хк}} / \mathbf{v_{хкр2}}$= 3,121532492927 , $\mathbf{M_{12к}}$ = 0,152541393617, $\mathbf{P_{12к}} / \mathbf{v_{хкр2}}$ = 0,476162916693 , $\mathbf{E_{к12к}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2$ = 0,347458606383 ;

3) система тел 1 и 2 имело:

а) до столкновения массу ($\mathbf{M_{11н}}$ + $\mathbf{M_{12н}}$) = 0,63409011852 , импульс ($\mathbf{P_{11н}}$ + $\mathbf{P_{12н}}$) / $\mathbf{v_{хкр2}}$ = 1,352582237306 , кинетическую энергию ($\mathbf{E_{к11н}}$ + $\mathbf{E_{к12н}}$) / $\mathbf{v_{хкр2}}^2$ = 0,86590988148 ;

б) после столкновения массу ($\mathbf{M_{11к}}$ + $\mathbf{M_{12к}}$) = 0,63409011852 , импульс ($\mathbf{P_{11к}}$ + $\mathbf{P_{12к}}$) / $\mathbf{v_{хкр2}}$ = 1,352582237306 , кинетическую энергию ($\mathbf{E_{к11к}}$ + $\mathbf{E_{к12к}}$) / $\mathbf{v_{хкр2}}^2$ = 0,86590988148 .

Для примера № 2 числовые расчеты дают следующие результаты:

I) в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

1) тело 1 имело:

а) до столкновения скорость $\mathbf{v_{21ун}} / \mathbf{v_{хкр2}}$ = 0,9 , массу $\mathbf{M_{21н}}$ = 0,743294146247, импульс $\mathbf{P_{21н}}$ / $\mathbf{v_{хкр2}}$ = 0,668964731622 , кинетическую энергию $\mathbf{E_{к21н}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2$ = 0,256705853753;

б) после столкновения $\mathbf{v_{21ук}} / \mathbf{v_{хкр2}}$ = 0,691099932748, $\mathbf{M_{21к}}$ = 0,822656908881, $\mathbf{P_{21к}} / \mathbf{v_{хкр2}}$ = 0,568538134403, $\mathbf{E_{к21к}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2$ = 0,177343091119;

2) тело 2 имело:

а) до столкновения $\mathbf{v_{22ун}}$ / $\mathbf{v_{хкр2}}$ = 0,6 , $\mathbf{M_{22н}}$ = 0,428746462856 , $\mathbf{P_{22н}} / \mathbf{v_{хкр2}}$ = 0,257247877714, $\mathbf{E_{к22н}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2$ = 0,071253537144;

б) после столкновения $\mathbf{v_{22ук}} / \mathbf{v_{хкр2}}$= 1,023729712365, $\mathbf{M_{22к}}$ = 0,349383700222 , $\mathbf{P_{22к}} / \mathbf{v_{хкр2}}$ = 0,357674474934 , $\mathbf{E_{к22к}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2$ = 0,150616299778 ;

3) система тел 1 и 2 имело:

а) до столкновения массу ($\mathbf{M_{21н}}$ + $\mathbf{M_{22н}}$) = 1,172040609103 , импульс ($\mathbf{P_{21н}}$ + $\mathbf{P_{22н}}$) / $\mathbf{v_{хкр2}}$ = 0,926212609336 , кинетическую энергию ($\mathbf{E_{к21н}}$ + $\mathbf{E_{к22н}}$) / $\mathbf{v_{хкр2}}^2$ = 0,327959390897;

б) после столкновения массу ($\mathbf{M_{21к}}$ + $\mathbf{M_{22к}}$) = 1,172040609103, импульс

$(\mathbf{P}_{21к} + \mathbf{P}_{22к}) / \mathbf{v}_{хкр2} = 0{,}926212609336$, кинетическую энергию $(\mathbf{E}_{к21к} + \mathbf{E}_{к22к}) / \mathbf{v}_{хкр2}^2 = 0{,}327959390897$;

II) в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

1) тело 1 имело:

а) до столкновения $\mathbf{v}_{11хн} / \mathbf{v}_{хкр2} = 0{,}5$, $\mathbf{v}_{11ун} / \mathbf{v}_{хкр2} = 1{,}006230589875$, массу $\mathbf{M}_{11н} = 0{,}664822495315$, проекции импульса $\mathbf{P}_{11хн} / \mathbf{v}_{хкр2} = 0{,}332411247657$ и $\mathbf{P}_{11ун} / \mathbf{v}_{хкр2} = 0{,}668964731622$, кинетическую энергию $\mathbf{E}_{к11н} / \mathbf{v}_{хкр2}^2 = 0{,}335177504685$;

б) после столкновения $\mathbf{v}_{11хк} / \mathbf{v}_{х\ кр2} = 0{,}5$, $\mathbf{v}_{11ук} / \mathbf{v}_{х\ кр2} = 0{,}772673214435$, $\mathbf{M}_{11к} = 0{,}735806708167$, $\mathbf{P}_{11хк} / \mathbf{v}_{хкр2} = 0{,}367903354084$, $\mathbf{P}_{11ук} / \mathbf{v}_{хкр2} = 0{,}568538134403$, $\mathbf{E}_{к11к} / \mathbf{v}_{хкр2}^2 = 0{,}264193291833$;

2) тело 2 имело:

а) до столкновения $\mathbf{v}_{12хн} / \mathbf{v}_{хкр2} = 0{,}5$, $\mathbf{v}_{12ун} / \mathbf{v}_{хкр2} = 0{,}67082039325$, $\mathbf{M}_{12н} = 0{,}383482494424$, $\mathbf{P}_{12хн} / \mathbf{v}_{хкр2} = 0{,}191741247212$, $\mathbf{P}_{12ун} / \mathbf{v}_{хкр2} = 0{,}257247877714$, $\mathbf{E}_{к12н} / \mathbf{v}_{хкр2}^2 = 0{,}116517505576$;

б) после столкновения $\mathbf{v}_{12хк} / \mathbf{v}_{хкр2} = 0{,}5$, $\mathbf{v}_{12ук} / \mathbf{v}_{хкр2} = 1{,}144564613718$, $\mathbf{M}_{12к} = 0{,}312498281571$, $\mathbf{P}_{12хк} / \mathbf{v}_{хкр2} = 0{,}156249140785$, $\mathbf{P}_{12ук} / \mathbf{v}_{хкр2} = 0{,}357674474934$, $\mathbf{E}_{к12к} / \mathbf{v}_{хкр2}^2 = 0{,}187501718429$;

3) система тел 1 и 2 имело:

а) до столкновения массу $(\mathbf{M}_{11н} + \mathbf{M}_{12н}) = 1{,}048304989738$, проекции импульса $(\mathbf{P}_{11хн} + \mathbf{P}_{12хн}) / \mathbf{v}_{хкр2} = 0{,}524152494869$ и $(\mathbf{P}_{11ун} + \mathbf{P}_{12ун}) / \mathbf{v}_{хкр2} = 0{,}926212609336$, кинетическую энергию $(\mathbf{E}_{к11н} + \mathbf{E}_{к12н}) / \mathbf{v}_{хкр2}^2 = 0{,}451695010262$;

б) после столкновения массу $(\mathbf{M}_{11к} + \mathbf{M}_{12к}) = 1{,}048304989738$, проекции импульса $(\mathbf{P}_{11хк} + \mathbf{P}_{12хк}) / \mathbf{v}_{хкр2} = 0{,}524152494869$ и $(\mathbf{P}_{11ук} + \mathbf{P}_{12ук}) / \mathbf{v}_{хкр2} = 0{,}926212609336$, кинетическую энергию $(\mathbf{E}_{к11к} + \mathbf{E}_{к12к}) / \mathbf{v}_{хкр2}^2 = 0{,}451695010262$.

По результатам расчета можно сделать следующий вывод, в примерах № 1 и № 2 в системах отсчета подвижной $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ и неподвижной $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ до и после столкновения масса, импульс и кинетическая энергия механической системы тел 1 и 2 остаются неизменными.

Следовательно формулы (132)-:-(134), написанные для случая, когда коэффициент перехода $\mathbf{0 < \beta < 1}$, удовлетворяют требованиям системы уравнений (93)-:-(101).

12. Сравнение формул (111)-:-(113) с формулами (132)-:-(134)

О зависимостях (111)-:-(113):

$$M(V)_> = M_o / [1 - (V^2 / v_{хкр1}{}^2)]^{1/2} \qquad (111)$$

$$P(V)_> = (M_o \cdot V) / [1 - (V^2 / v_{хкр1}{}^2)]^{1/2} \qquad (112)$$

$$E_к(V)_> = M_o \cdot v_{хкр1}{}^2 \cdot \{\{1 / [1 - (V^2 / v_{хкр1}{}^2)]^{1/2}\} - 1\} \qquad (113)$$

для массы $\mathbf{M(V)_>}$, импульса $\mathbf{P(V)_>}$ и кинетической энергии $\mathbf{E_к(V)_>}$ движущегося тела со скоростью **V**, в случае когда коэффициент перехода $\mathbf{\beta > 1}$, можно сказать следующее:

- при значениях скорости **V** несоизмеримо малых со скоростью $\mathbf{v_{хкр1}}$: $M(V)_> = M_o$, $P(V)_> = M_o \cdot V$, $E_к(V)_> = (M_o \cdot V^2) /2$;

- при $\mathbf{V = v_{хкр1}}$: $M(V)_> = \infty$, $P(V)_> = \infty$, $E_к(V)_> = \infty$;

- при $\mathbf{V < v_{хкр1}}$: $M(V)_>$, $P(V)_>$ и $E_к(V)_>$ - имеют действительные значения;

- при $\mathbf{V > v_{хкр1}}$: $M(V)_>$, $P(V)_>$ и $E_к(V)_>$ - действительных значений не имеют.

Аналогично о зависимостях (132)-:-(134):

$$M(V)_< = M_o / [1 + (V^2 / v_{хкр2}{}^2)]^{1/2} \qquad (132)$$

$$P(V)_< = (M_o \cdot V) / [1 + (V^2 / v_{хкр2}{}^2)]^{1/2} \qquad (133)$$

$$E_к(V)_< = M_o \cdot v_{хкр2}{}^2 \cdot \{ 1 - \{1 / [1 + (V^2 / v_{хкр2}{}^2)]^{1/2}\}\} \qquad (134)$$

для массы $\mathbf{M(V)_<}$, импульса $\mathbf{P(V)_<}$ и кинетической энергии $\mathbf{E_к(V)_<}$ движущегося тела со скоростью **V**, в случае когда коэффициент перехода $\mathbf{0 < \beta < 1}$ **,** можно сказать следующее:

- при значениях скорости **V** несоизмеримо малых со скоростью $\mathbf{v_{хкр2}}$: $M(V)_< = M_o$, $P(V)_< = M_o \cdot V$, $E_к(V)_< = (M_o \cdot V^2) /2$;

- при $\mathbf{V = v_{хкр2}}$: $M(V)_< = M_o \cdot (2)^{-1/2}$, $P(V)_< = M_o \cdot v_{хкр2} \cdot (2)^{-1/2}$ и

$E_к(V)_< = M_o \cdot v_{xкр2}^{\ 2} \cdot \ [1 - (2)^{-1/2}]$;

- при $\mathbf{V} = \infty$: $M(V)_<$ стремится к нулю, $P(V)_< = M_o \cdot v_{xкр2}$, $E_к(V)_< = M_o \cdot v_{xкр2}^{\ 2}$.

Используя формулы (111), (112), (62), (63), (68), (69) и (132), (133), (78), (79), (84), (85), также можно отметить, что как для коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta > 1}$, так и для $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$: сила $\mathbf{F_x}$, в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ приложенная к материальной точке, которая движется параллельно оси $\mathbf{O_2x_2}$ или находится в состоянии покоя, и линия действия которой параллельна оси $\mathbf{O_2x_2}$, будет инвариантна для любой инерциальной системы отсчета, движущейся относительно системы $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ вдоль оси $\mathbf{O_2x_2}$.

13. Проверка на примере № 3 формул (110) при β > 1 и (131) при 0 < β < 1

Проведенные проверки формул (110) и (131) на простейших примерах № 1 и № 2 еще не дают гарантию, что при использовании формул (111)-:-(113) и (132)-:-(134) для других замкнутых механических систем тел в инерциальных системах отсчета будет выполняться закон сохранения импульса.

Пример № 3

Допустим, что имеются две инерциальные системы отсчета, аналогичные системам отсчета, изображенным на рис.1, неподвижная $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижная $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, которая бы двигалась со скоростью $\mathbf{V}$ параллельно оси $\mathbf{O_1x_1}$ относительно системы $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$.

Предположим, что имеется замкнутая механическая система тел, показанная на рис.5 и состоящая из точечных тела 1 и тела 2, имеющих равные массы $\mathbf{M_o}$ в состоянии покоя.

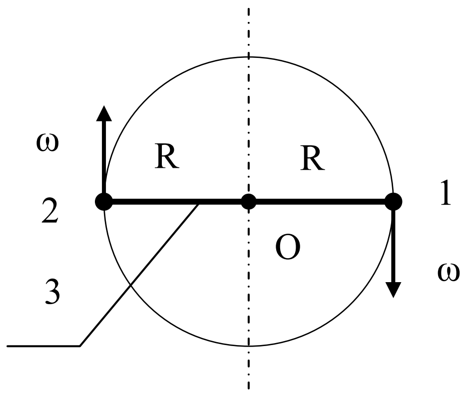

Рис. 5

Тела 1 и 2 соединены абсолютно жесткой (недеформируемой) нитью 3, не имеющей массы.

Тела 1 и 2 вращаются с угловой скоростью **ω** вокруг общего центра масс точки **O**. Расстояние от точечного тела 1 (тела 2) до точки **O** равно **R**.

Поместим рассматриваемую замкнутую систему тел 1 и 2 в подвижную систему отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ таким образом, чтобы точка **O** была бы неподвижна в этой системе и совпадала с началом координат $\mathbf{O_2}$, а вращение тел 1 и 2 вокруг нее происходило бы по часовой стрелке в плоскости $\mathbf{O_2x_2y_2}$, как показано на рис. 6.

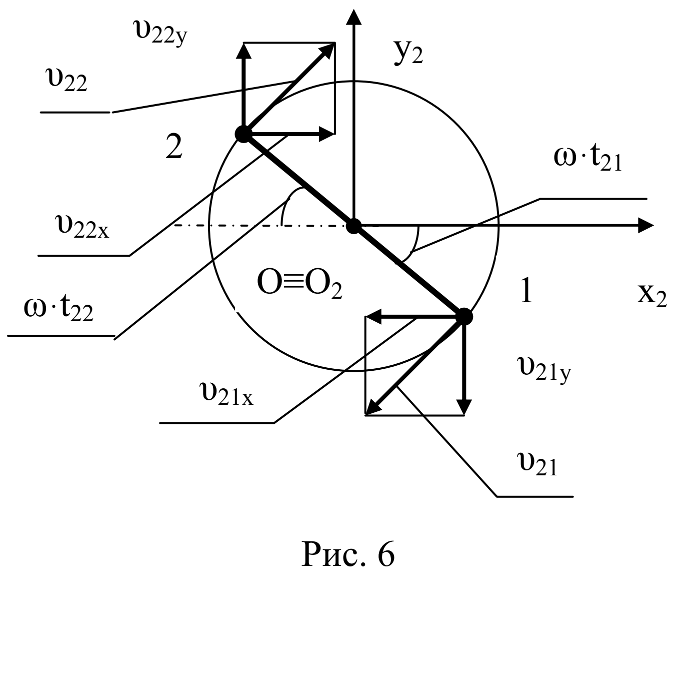

Рис. 6

Также допустим, что в момент начала отсчета времени ($\mathbf{t_2}$=0) в системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ тела 1 и 2 находились на оси $\mathbf{O_2x_2}$, причем тело 1 имело положительную координату, а тело 2 – отрицательную.

Опираясь на выше сказанное можно отметить, что в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ в любой момент времени $\mathbf{t_2}$ тела 1 и 2 будут иметь скорости $\boldsymbol{\upsilon_{21}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22}}$ соответственно равные:

$$\upsilon_{21} = \upsilon_{22} = \upsilon = \omega \cdot R \qquad (144)$$

При этом проекции $\boldsymbol{\upsilon_{21x}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{21y}}$ скорости тела 1 и проекции $\boldsymbol{\upsilon_{22x}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22y}}$ скорости тела 2 на оси $\mathbf{O_2x_2}$ и $\mathbf{O_2y_2}$ соответственно для моментов времени $\mathbf{t_{21}}$ и $\mathbf{t_{22}}$ будут равны:

$$\upsilon_{21x} = -[\upsilon \cdot Sin(\omega \cdot t_{21})] \qquad (145)$$

$$\upsilon_{21y} = -[\upsilon \cdot Cos(\omega \cdot t_{21})] \qquad (146)$$

$$\upsilon_{22x} = \upsilon \cdot Sin(\omega \cdot t_{22}) \qquad (147)$$

$$\upsilon_{22y} = \upsilon \cdot Cos(\omega \cdot t_{22}) \qquad (148)$$

Связь между координатами $\mathbf{x_{21}}$ и $\mathbf{y_{21}}$ тела 1 в зависимости от времени $\mathbf{t_{21}}$ и связь между координатами $\mathbf{x_{22}}$ и $\mathbf{y_{22}}$ тела 2 в зависимости от времени $\mathbf{t_{22}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ можно записать в виде:

$$x_{21} = R \cdot Cos(\omega \cdot t_{21}) \qquad (149)$$

$$y_{21} = -[R \cdot Sin(\omega \cdot t_{21})] \qquad (150)$$

$$x_{22} = -[R \cdot Cos(\omega \cdot t_{22})] \qquad (151)$$

$$y_{22} = R \cdot Sin(\omega \cdot t_{21}) \qquad (152)$$

Опираясь на уравнения (11) и (13) можно написать связь между координатами $\mathbf{x_{11}}$ и $\mathbf{y_{11}}$ тела 1 в момент времени $\mathbf{t_{11}}$ в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и координатами $\mathbf{x_{21}}$ и $\mathbf{y_{21}}$ тела 1 в момент времени $\mathbf{t_{21}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

$$x_{11} = \beta \cdot [x_{21} + (V \cdot t_{21})] \qquad (153)$$

$$y_{11} = y_{21} \qquad (154)$$

Аналогично используя уравнения (11) и (13) можно написать связь между координатами $\mathbf{x_{12}}$ и $\mathbf{y_{12}}$ тела 2 в момент времени $\mathbf{t_{12}}$ в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и координатами $\mathbf{x_{22}}$ и $\mathbf{y_{22}}$ тела 2 в момент времени

$\mathbf{t_{22}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

$$x_{12} = \beta \cdot [x_{22} + (V \cdot t_{22})] \qquad (155)$$

$$y_{12} = y_{22} \qquad (156)$$

С помощью формулы (15) можно записать связь между значениями времен $\mathbf{t_{11}}$, $\mathbf{t_{21}}$ и $\mathbf{t_{12}}$, $\mathbf{t_{22}}$:

$$t_{11} = \{[(\beta^2 - 1) \cdot x_{21}] / (\beta \cdot V)\} + (\beta \cdot t_{21}) \qquad (157)$$

$$t_{12} = \{[(\beta^2 - 1) \cdot x_{22}] / (\beta \cdot V)\} + (\beta \cdot t_{22}) \qquad (158)$$

В рассматриваемом примере нас будет интересовать положение тел 1 и 2 в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ в один и тот же момент времени, т.е. когда:

$$t_{11} = t_{12} \qquad (159)$$

Тогда уравнение (159) с учетом формул (149), (151), (153), (155), (157) и (158) примет вид:

$$\{[(\beta^2-1)\cdot R\cdot Cos(\omega\cdot t_{21})]/(\beta\cdot V)\}+(\beta\cdot t_{21})=\{[(1-\beta^2)\cdot R\cdot Cos(\omega\cdot t_{22})]/(\beta\cdot V)\}+(\beta\cdot t_{22}) \quad (160)$$

В подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ при выполнении условия (159) представляет интерес положение тел 1 и 2, когда:

$$t_{21} = t_{22} = t_{2p} \qquad (161)$$

Подставив условие (161) в уравнение (160) и для случая, когда $\mathbf{(\omega \cdot t_{2p}) < \pi}$, получим:

$$(\omega \cdot t_{2p}) = \pi / 2 \qquad (162)$$

Также в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ при выполнении условия (159) представляет интерес положение тел 1 и 2, когда:

$$t_{21} = 0 \qquad (163)$$

Значение времени $\mathbf{t_{22}}$ при выполнении условий (159) и (163) обозначим $\mathbf{t_{22т}}$, для которого уравнение (160) примет вид:

$$t_{22т} = [1 - (1/\beta^2)] \cdot [1 + Cos(\omega \cdot t_{22т})] \cdot (R / V) \qquad (164)$$

или:

$$\omega \cdot t_{22т} = [1 - (1/\beta^2)] \cdot [1 + Cos(\omega \cdot t_{22т})] \cdot (\upsilon / V) \qquad (165)$$

Как видно из уравнения (165) значение времени $\mathbf{t_{22т}}$ в зависимости от значения коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ может быть:

- $\mathbf{t_{22т}} > 0$ при $\boldsymbol{\beta > 1}$;
- $\mathbf{t_{22т}} < 0$ при $\mathbf{0 < \boldsymbol{\beta} < 1}$;
- $\mathbf{t_{22т}} = 0$ при $\boldsymbol{\beta = 1}$.

Теперь можем перейти к проверке выполнения закона сохранения импульса.

Рассмотрим два момента времени в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$.

а) момент времени $\mathbf{t_{1p}}$

Моменту времени $\mathbf{t_{1p}}$ в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$, которому в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ для тел 1 и 2 будет соответствовать момент времени $\mathbf{t_{2p}}$.

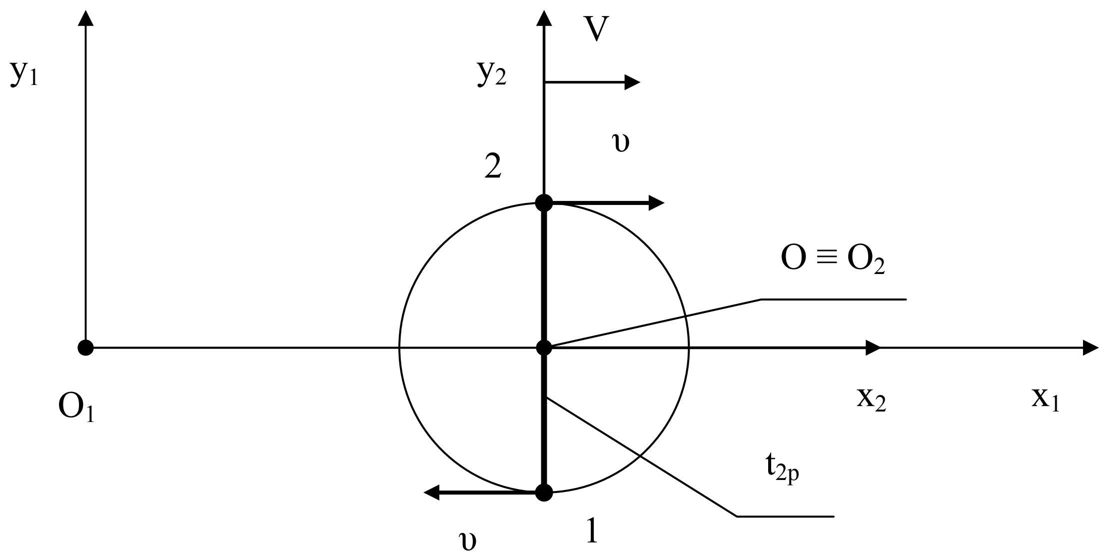

Рис. 7

Как показано на рис. 7 в соответствии с уравнением (162), (145)-:-(148) в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ в момент времени $\mathbf{t_{2p}}$ тело 1 и тело 2 соответственно будут иметь следующие значения проекций $\boldsymbol{\upsilon_{21xp}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{21yp}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22xp}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{22yp}}$ скоростей своего движения на оси $\mathbf{O_2x_2}$ и $\mathbf{O_2y_2}$:

$$\upsilon_{21xp} = -\upsilon \qquad (166)$$

$$\upsilon_{21yp} = 0 \qquad (167)$$

$\upsilon_{22xp} = \quad \upsilon$ (168)

$\upsilon_{22yp} = \quad 0$ (169)

Тогда исходя из формул (17), (19) и (166)-:-(169), в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ в момент времени $\mathbf{t_{1p}}$ тело 1 и тело 2 соответственно будут иметь следующие значения проекций $\boldsymbol{\upsilon_{11xp}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{11yp}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{12xp}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{12yp}}$ скоростей своего движения на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$:

$\upsilon_{11xp} = (V - \upsilon) / \boldsymbol{\{}1 - \{[(\beta^2 - 1) \cdot \upsilon] / (\beta^2 \cdot V)\}\boldsymbol{\}}$ (170)

$\upsilon_{11yp} = \quad 0$ (171)

$\upsilon_{12xp} = (V + \upsilon) / \boldsymbol{\{}\{[(\beta^2 - 1) \cdot \upsilon] / (\beta^2 \cdot V)\} + 1\boldsymbol{\}}$ (172)

$\upsilon_{12yp} = \quad 0$ (173)

б) момент времени $\mathbf{t_{1т}}$

Моменту времени $\mathbf{t_{1т}}$ в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ будет соответствовать момент времени $\mathbf{t_{21} = 0}$ для тела 1 и момент времени $\mathbf{t_{22т}}$ для тела 2 в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$.

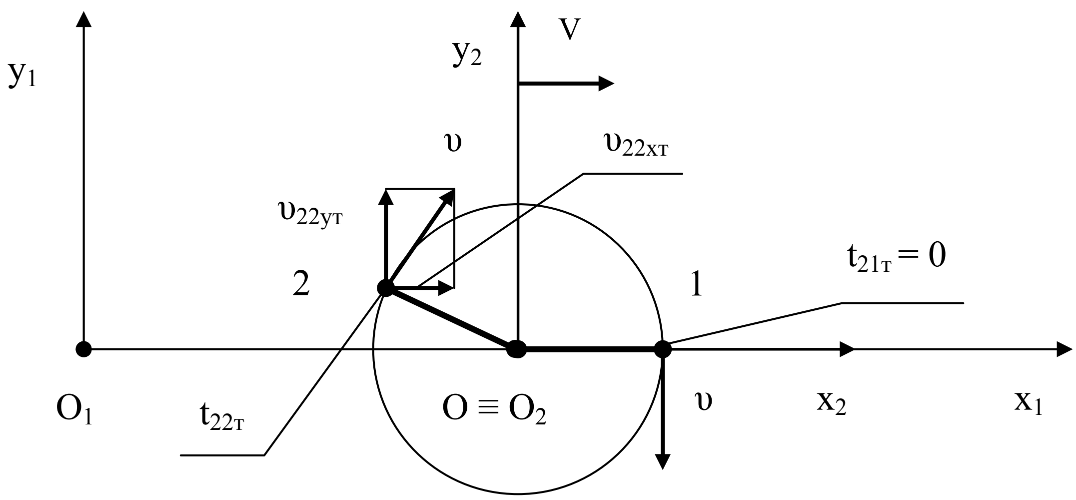

Рис. 8

Как показано на рис. 8 в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ в момент времени $\mathbf{t_{21} = 0}$ тело 1 и в момент времени $\mathbf{t_{22т}}$ тело 2 соответственно будут иметь следующие значения проекций $\boldsymbol{\upsilon_{21xт}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{21yт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22xт}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{22yт}}$ скоростей своего движения на оси $\mathbf{O_2x_2}$ и $\mathbf{O_2y_2}$, причем:

$\upsilon_{21хт} = 0$ (174)

$\upsilon_{21ут} = -\upsilon$ (175)

Тогда исходя из формул (17), (19), (174) и (175) в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ в момент времени $\mathbf{t_{1т}}$ тело 1 и тело 2 соответственно будут иметь следующие значения проекций $\boldsymbol{\upsilon_{11хт}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{11ут}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{12хт}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{12ут}}$ скоростей своего движения на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$:

$\upsilon_{11хт} = V$ (176)

$\upsilon_{11ут} = -(\upsilon / \beta)$ (177)

$\upsilon_{12хт} = (V + \upsilon_{22хт}) / \boldsymbol{\{}\{[(\beta^2 - 1) \cdot \upsilon_{22хт}] / (\beta^2 \cdot V)\} + 1\boldsymbol{\}}$ (178)

$\upsilon_{12ут} = \upsilon_{22ут} / \boldsymbol{\{}\{[(\beta^2 - 1) \cdot \upsilon_{22хт}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\}}$ (179)

Из уравнений (147) и (148) можно получить:

$\upsilon_{22хт}^2 + \upsilon_{22ут}^2 = \upsilon^2$ (180)

Используя закон сохранения импульса для замкнутой механической системы тел 1 и 2 в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ для моментов времени $\mathbf{t_{1р}}$ и $\mathbf{t_{1т}}$ с учетом формул (90), (91), (167), (169), (171) и (173) можно записать:

$[M_о \cdot f\ (V = \upsilon_{11хр}) \cdot \upsilon_{11хр}] + [M_о \cdot f\ (V = \upsilon_{12хр}) \cdot \upsilon_{12хр}] = \{M_о \cdot f\,[V = (\upsilon_{11хт}^2+\upsilon_{11ут}^2)^{1/2}] \cdot \upsilon_{11хт}\} + \{M_о \cdot f\,[V = (\upsilon_{12хт}^2+\upsilon_{12ут}^2)^{1/2}] \cdot \upsilon_{12хт}\}$ (181)

$0 = \{M_о \cdot f\,[V=(\upsilon_{11хт}^2+\upsilon_{11ут}^2)^{1/2}] \cdot \upsilon_{11ут}\} + \{M_о \cdot f\,[V=(\upsilon_{12хт}^2+\upsilon_{12ут}^2)^{1/2}] \cdot \upsilon_{12ут}\}$ (182)

Определение условий выполнения закона импульса при β>1 в примере № 3

В случае если коэффициент перехода **β>1** , то значения **β** и функции **f (V)** определяются:

$\beta_>^{\,2} = 1 / [1 - (V^2 / v_{xкр1}^2)]$ (39)

$f\,(V)_> = 1 / [1 - (V^2 / v_{xкр1}^2)]^{1/2}$ (110)

Тогда с учетом формулы (110) уравнения (181) и (182) примут вид:

$\{(M_о \cdot \upsilon_{11хр})/[1-(\upsilon_{11хр}^2/v_{xкр1}^2)]^{1/2}\} + \{(M_о \cdot \upsilon_{12хр})/[1-(\upsilon_{11хр}^2/v_{xкр1}^2)]^{1/2}]\} = \boldsymbol{\{}(M_о \cdot \upsilon_{11хт}) / \{1-[(\upsilon_{11хт}^2+\upsilon_{11ут}^2)/v_{xкр1}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}(M_о \cdot \upsilon_{12хт})/\{1 - [\ (\upsilon_{12хт}^2+\upsilon_{12ут}^2)/v_{xкр1}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}}$ (183)

$0 = \boldsymbol{\{}(M_о \cdot \upsilon_{11ут}) / \{1 - [(\upsilon_{11хт}^2 + \upsilon_{11ут}^2) / v_{xкр1}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}(M_о \cdot \upsilon_{12ут}) / \{1 -$

$[(\upsilon_{12хт}{}^2 + \upsilon_{12ут}{}^2) / v_{хкр1}{}^2\ ]\}^{1/2}\}$ (184)

Формулы (170), (172) и (176)-:-(179) с учетом формулы (39) можно записать:

$\upsilon_{11хр} = (V - \upsilon) / \{1 - [(V \cdot \upsilon)/v_{хкр1}{}^2]\}$ (185)

$\upsilon_{12хр} = (V + \upsilon) / \{1 + [(V \cdot \upsilon)/ v_{хкр1}{}^2]\}$ (186)

$\upsilon_{11хт} = V$ (176)

$\upsilon_{11ут} = - \{\upsilon \cdot [1 - (V^2/ v_{хкр1}{}^2)]^{1/2}\}$ (187)

$\upsilon_{12хт} = (V + \upsilon_{22хт}) / \{1 + [(V \cdot \upsilon_{22хт})/ v_{хкр1}{}^2]\}$ (188)

$\upsilon_{12ут} = \{\upsilon_{22ут} \cdot [1 - (V^2/ v_{хкр1}{}^2)]^{1/2}\} / \{1 + [(V \cdot \upsilon_{22хт}) / v_{хкр1}{}^2]\}$ (189)

Вставив проекции скоростей $\boldsymbol{\upsilon_{11хр}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{12хр}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{11хт}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{11ут}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{12хт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{12ут}}$ из формул (176), (185)-:-(189) в уравнения (183) и (184) с учетом формулы (180) получим:

$\{[M_о \cdot (V - \upsilon)] / \{[1 - (\upsilon^2/v_{хкр1}{}^2)]^{1/2} \cdot [1 - (V^2/v_{хкр1}{}^2)]^{1/2}\}\} + \{[M_о \cdot (V + \upsilon))] / \{[1 - (\upsilon^2/v_{хкр1}{}^2)]^{1/2} \cdot [1 - (V^2/v_{хкр1}{}^2)]^{1/2}\}\} = \{(M_о \cdot V) / \{[1 - (\upsilon^2/v_{хкр1}{}^2)]^{1/2} \cdot [1 - (V^2/v_{хкр1}{}^2)]^{1/2}\}\} + \{[M_о \cdot (V + \upsilon_{22хт})]/\{[1 - (\upsilon^2/v_{хкр1}{}^2)]^{1/2} \cdot [1 - (V^2/v_{хкр1}{}^2)]^{1/2}\}\}$ (190)

$0 = - \{(M_о \cdot \upsilon) / [1 - (\upsilon^2/v_{хкр1}{}^2)]^{1/2}\} + \{(M_о \cdot \upsilon_{22ут}) / [1 - (\upsilon^2/v_{хкр1}{}^2)]^{1/2}\}$ (191)

Из уравнений (190) и (191) получаем необходимые условия (значения $\boldsymbol{\upsilon_{22хт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22ут}}$), при которых в примере № 3 при коэффициенте перехода $\boldsymbol{\beta > 1}$ будет выполняться закон сохранения импульса:

$\upsilon_{22хт} = 0$ (192)

$\upsilon_{22ут} = \upsilon$ (193)

Подставив условия (192) и (193) в уравнения (147) и (148), получим:

$t_{22т} = t_{21т} = 0$ (194)

А подставив уравнение (194) в формулу (165):

$\omega \cdot 0 = [1 - (1/ \beta^2)] \cdot (1 + 1) \cdot (\upsilon / V)$ (195)

получим еще одно условие выполнения закона сохранения импульса для примера № 3:

$\beta = 1$ (196)

Таким образом получается, что в замкнутой механической системе тел, рассматриваемой в примере № 3, для значений коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta > 1}$

закон сохранения импульса не выполняется.

Определение условий выполнения закона импульса при 0<β<1 в примере №3

В случае если коэффициенте перехода **0 < β < 1** , то значения **β** и **f (V)** определяются:

$$\beta_{<}^{2} = 1 / [1 + (V^2 / v_{xкр2}^2)] \qquad (40)$$

$$f(V)_{<} = 1 / [1 + (V^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2} \qquad (131)$$

Тогда с учетом формулы (131) уравнения (181) и (182) примут вид:

$$\{(M_o \cdot \upsilon_{11xp}) / [1+(\upsilon_{11xp}^2/v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} + \{(M_o \cdot \upsilon_{12xp})/[1+(\upsilon_{11xp}^2/v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} = \{(M_o \cdot \upsilon_{11xт}) / \{1+[(\upsilon_{11xт}^2+\upsilon_{11yт}^2)/v_{xкр2}^2]\}^{1/2}\} + \{(M_o \upsilon_{12xт})/\{1+[(\upsilon_{12xт}^2+\upsilon_{12yт}^2)/v_{xкр2}^2]\}^{1/2}\} \qquad (197)$$

$$0 = \{(M_o \cdot \upsilon_{11yт}) / \{1 + [(\upsilon_{11xт}^2 + \upsilon_{11yт}^2) / v_{xкр2}^2]\}^{1/2}\} + \{(M_o \cdot \upsilon_{12yт}) / \{1 + [(\upsilon_{12xт}^2 + \upsilon_{12yт}^2) / v_{xкр2}^2]\}^{1/2}\} \qquad (198)$$

Формулы (170), (172) и (176)-:-(179) с учетом формулы (40) можно записать:

$$\upsilon_{11xp} = (V - \upsilon) / \{1 + [(V \cdot \upsilon)/v_{xкр2}^2]\} \qquad (199)$$

$$\upsilon_{12xp} = (V + \upsilon) / \{1 - [(V \cdot \upsilon)/ v_{xкр2}^2]\} \qquad (200)$$

$$\upsilon_{11xт} = V \qquad (176)$$

$$\upsilon_{11yт} = - \{\upsilon \cdot [1 + (V^2/ v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} \qquad (201)$$

$$\upsilon_{12xт} = (V + \upsilon_{22xт}) / \{1 - [(V \cdot \upsilon_{22xт})/ v_{xкр2}^2]\} \qquad (202)$$

$$\upsilon_{12yт} = \{\upsilon_{22yт} \cdot [1 + (V^2/ v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} / \{1 - [(V \cdot \upsilon_{22xт}) / v_{xкр2}^2]\} \qquad (203)$$

Вставив проекции скоростей $\boldsymbol{\upsilon_{11xp}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{12xp}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{11xт}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{11yт}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{12xт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{12yт}}$ из формул (176), (199)-:-(203) в уравнения (197) и (198) с учетом формулы (180) получим:

$$\{[M_o \cdot (V - \upsilon)] / \{[1 + (\upsilon^2/v_{xкр2}^2)]^{1/2} \cdot [1 + (V^2/v_{xкр2}^2)]^{1/2}\}\} + \{[M_o \cdot (V + \upsilon))] / \{[1 + (\upsilon^2/v_{xкр2}^2)]^{1/2} \cdot [1 + (V^2/v_{xкр2}^2)]^{1/2}\}\} = \{(M_o \cdot V) / \{[1 + (\upsilon^2/v_{xкр2}^2)]^{1/2} \cdot [1 + (V^2/v_{xкр2}^2)]^{1/2}\}\} + \{[M_o \cdot (V + \upsilon_{22xт})]/\{[1 + (\upsilon^2/v_{xкр2}^2)]^{1/2} \cdot [1 + (V^2/v_{xкр2}^2)]^{1/2}\}\} \qquad (204)$$

$$0 = - \{(M_o \cdot \upsilon) / [1 + (\upsilon^2/v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} + \{(M_o \cdot \upsilon_{22yт}) / [1 + (\upsilon^2/v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} \qquad (205)$$

Из уравнений (204) и (205) получаем необходимые условия (значения $\boldsymbol{\upsilon_{22xт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22yт}}$), при которых в примере № 3 при коэффициенте перехода

$0 < \beta < 1$ будет выполняться закон сохранения импульса:

$$\upsilon_{22хт} = 0 \qquad (192)$$

$$\upsilon_{22ут} = \upsilon \qquad (193)$$

А это означает, что:

$$t_{22т} = t_{21т} = 0 \qquad (194)$$

и условием выполнения закона сохранения импульса для примера № 3 также является:

$$\beta = 1 \qquad (196)$$

Таким образом получается, что в замкнутой механической системе тел, рассматриваемой в примере № 3, и для значений коэффициента перехода **$0 < \beta < 1$** закон сохранения импульса не выполняется.

Подтвердим выше сказанное числовыми расчетами.

1) для случая, когда значения коэффициента перехода $\beta>1$

Предположим, что $\mathbf{V / v_{хкр1}} = 0{,}9$, $\boldsymbol{\upsilon} / \mathbf{v_{хкр1}} = 0{,}6$.

Уравнение (165) с учетом формулы (39) можно записать в виде:

$$\omega \cdot t_{22т} = [(\upsilon \cdot V)/ v_{хкр1}{}^2] \cdot [1 + \mathrm{Cos}\,(\omega \cdot t_{22т})] \qquad (206)$$

Тогда получим:

$\boldsymbol{\omega \cdot t_{22т}} = 0{,}8828669738$, проекции $\boldsymbol{\upsilon_{22хт}} / \mathbf{v_{хкр1}} = 0{,}4635374427$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22ут}} / \mathbf{v_{хкр1}} = 0{,}3809633042$ скорости движения тела 2 в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$.

В неподвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

а) в момент времени $\mathbf{t_{1р}}$ тела 1 и 2 соответственно имели проекции $\mathbf{К_{11хр}} / \mathbf{v_{хкр1}} = 0{,}860309002$ и $\mathbf{К_{12хр}} / \mathbf{v_{хкр1}} = 4{,}30154501$ импульса на ось $\mathbf{O_1x_1}$;

б) в момент времени $\mathbf{t_{1т}}$ тело 1 имело проекции $\mathbf{К_{11хт}} / \mathbf{v_{хкр1}} = 2{,}580927006$ и $\mathbf{К_{11ут}} / \mathbf{v_{хкр1}} = -0{,}75$ импульса на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$;

в) в момент времени $\mathbf{t_{1т}}$ тело 2 имело проекции $\mathbf{К_{12хт}} / \mathbf{v_{хкр1}} = 3{,}9102117884$ и $\mathbf{К_{12ут}} / \mathbf{v_{хкр1}} = 0{,}4762041303$ импульса на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$;

г) в момент времени $\mathbf{t_{1р}}$ система тел 1 и 2 имела проекции $\mathbf{К_{11х\Sigma р}} / \mathbf{v_{хкр1}} =$

5,161854012 и $\mathbf{K}_{12y\Sigma р} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0$ импульса на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$;

д) в момент времени $\mathbf{t}_{1т}$ система тел 1 и 2 имела проекции $\mathbf{K}_{11x\Sigma т} / \mathbf{v}_{xкр1}$ = 6,491138794 и $\mathbf{K}_{12y\Sigma т} / \mathbf{v}_{xкр1}$ = – 0,2737958696 импульса на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$.

Закон сохранения импульса не выполняется, т.к.: 5,161854012 # 6,491138794 и – 0,2737958696 # 0 .

2) для случая, когда значения коэффициента перехода 0 < β < 1

Предположим, что $\mathbf{V} / \mathbf{v}_{xкр2} = 0{,}9$, $\boldsymbol{\upsilon} / \mathbf{v}_{xкр2} = 0{,}6$.

Уравнение (165) с учетом формулы (40) можно записать в виде:

$$\omega \cdot t_{22т} = - [(\upsilon \cdot V)/ v_{xкр2}^2] \cdot [1 + \mathrm{Cos}\,(\omega \cdot t_{22т})] \qquad (207)$$

Тогда получим:

$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t}_{22т}$ = – 0,8828669738, проекции $\boldsymbol{\upsilon}_{22xт} / \mathbf{v}_{xкр2}$ = – 0,4635374427 и $\boldsymbol{\upsilon}_{22yт} / \mathbf{v}_{xкр2}$ = 0,3809633042 скорости движения тела 2 в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$.

В неподвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

а) в момент времени $\mathbf{t}_{1р}$ тела 1 и 2 соответственно имели проекции $\mathbf{K}_{11xр}/\mathbf{v}_{xкр2}$ = 0,1912108416 и $\mathbf{K}_{12xр}/\mathbf{v}_{xкр2}$ = 0,9560542082 импульса на ось $\mathbf{O_1x_1}$;

б) в момент времени $\mathbf{t}_{1т}$ тело 1 имело проекции $\mathbf{K}_{11xт} / \mathbf{v}_{xкр2}$ = 0,5736325249 и $\mathbf{K}_{11yт} / \mathbf{v}_{xкр2}$ = – 0,5144957554 импульса на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$ соответственно;

в) в момент времени $\mathbf{t}_{1т}$ тело 2 имело проекции $\mathbf{K}_{12xт} / \mathbf{v}_{xкр2}$ = 0,2781879097 и $\mathbf{K}_{12yт} / \mathbf{v}_{xкр2}$ = 0,3266733383 импульса на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$;

г) в момент времени $\mathbf{t}_{1р}$ система тел 1 и 2 имела проекции $\mathbf{K}_{11x\Sigma р} / \mathbf{v}_{xкр2}$ = 1,1472650498 и $\mathbf{K}_{12y\Sigma р} / \mathbf{v}_{xкр2} = 0$ импульса на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$;

д) в момент времени $\mathbf{t}_{1т}$ система тел 1 и 2 имела проекции $\mathbf{K}_{11x\Sigma т} / \mathbf{v}_{xкр2}$ = 0,8518204346 и $\mathbf{K}_{12y\Sigma т} / \mathbf{v}_{xкр2}$ = – 0,187822417 импульса на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$.

Закон сохранения импульса не выполняется, т.к.: 1,1472650498 # 0,8518204346 и – 0,187822417 # 0 .

14. Заключение

В заключение можно обобщить выше написанное.

Кинематика

Использование принципа относительности и симметрии пространства и времени позволило:

1. перейти от системы уравнений связи инерциальных систем отсчета неподвижной $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижной $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

$$x_1 = \beta_1 \cdot (x_2 + V_1 \cdot t_2) \quad (1)$$

$$x_2 = \beta_2 \cdot (x_1 + V_2 \cdot t_1) \quad (2)$$

$$y_1 = \beta_3 \cdot y_2 \quad (3)$$

$$y_2 = \beta_4 \cdot y_1 \quad (4)$$

$$z_1 = \beta_5 \cdot z_2 \quad (5)$$

$$z_2 = \beta_6 \cdot z_1 \quad (6)$$

к системе уравнений:

$$x_1 = \beta \cdot (x_2 + V \cdot t_2) \quad (11)$$

$$x_2 = \beta \cdot (x_1 - V \cdot t_1) \quad (12)$$

$$y_1 = y_2 \quad (13)$$

$$z_1 = z_2 \quad (14)$$

2. установить, что значения коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ для инерциальных систем отсчета могут находиться в трех взаимоисключающих диапазонах:

- $\boldsymbol{\beta > 1}$,
- $\mathbf{0 < \boldsymbol{\beta} < 1}$,
- $\boldsymbol{\beta = 1}$;

3. получить формулу для коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ для инерциальных систем отсчета для случая $\boldsymbol{\beta > 1}$:

$$\beta_{>}^{\,2} = 1 / [1 - (V^2 / v_{хкр1}^{\,2})] \quad (39)$$

где: $\mathbf{v_{хкр1}}$ - постоянная действительная величина;

4. получить формулу для коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ для инерциальных систем отсчета для случая $\mathbf{0 < \boldsymbol{\beta} < 1}$:

$\beta_{<}{}^{2} \;=\; 1 / [1 + (V^2 / v_{хкр2}{}^2)]$ (40)

где: $\mathbf{v_{хкр2}}$ - постоянная действительная величина;

5. установить, что при коэффициенте перехода $\boldsymbol{\beta > 1}$ существует такое действительное значение скорости $\mathbf{V_{хкр1}}$ (равное $\mathbf{v_{хкр1}}$) движения точки, которое было бы инвариантно во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета:

$v_{хкр1} \;=\; \mathrm{Const}$ (56)

6. установить, что при коэффициенте перехода $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$ имеет место только мнимое значение скорости $\mathbf{V_{хкр2}}$ (равное $\mathbf{(í \cdot v_{хкр2})}$) движения точки, которое было бы инвариантно во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета:

$v_{хкр2} \;=\; \mathrm{Const}$ (57)

Динамика

1. Используя обязательность выполнения в инерциальных системах отсчета закона сохранения импульса и закона сохранения механической энергии (а точнее его частного случая - закона сохранения кинетической энергии) для замкнутой механической системы тел, двигающихся прямолинейно и испытывающих только абсолютно упругие взаимодействия, были получены зависимости массы, импульса и кинетической энергии тела от скорости его движения:

- при $\boldsymbol{\beta > 1}$:

$M(V)_{>} \;=\; M_o / [1 - (V^2 / v_{хкр1}{}^2)]^{1/2}$ (111)

$P(V)_{>} \;=\; (M_o \cdot V) / [1 - (V^2 / v_{хкр1}{}^2)]^{1/2}$ (112)

$E_к(V)_{>} \;= M_o \cdot v_{хкр1}{}^2 \cdot \boldsymbol{\{}\{1 / [1 - (V^2 / v_{хкр1}{}^2)]^{1/2}\} - 1\boldsymbol{\}}$ (113)

- при $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$:

$M(V)_{<} \;=\; M_o / [1 + (V^2 / v_{хкр2}{}^2)]^{1/2}$ (132)

$P(V)_{<} \;=\; (M_o \cdot V) / [1 + (V^2 / v_{хкр2}{}^2)]^{1/2}$ (133)

$E_к(V)_{<} \;= M_o \cdot v_{хкр2}{}^2 \cdot \boldsymbol{\{} 1 - \{1 / [1 + (V^2 / v_{хкр2}{}^2)]^{1/2}\}\boldsymbol{\}}$ (134)

2. Закон сохранения импульса замкнутой механической системы тел,

двигающихся непрямолинейно, для любого момента времени в инерциальных системах отсчета (во всех, кроме системы отсчета, в которой центр масс системы тел неподвижен) не выполняется:

- при $\boldsymbol{\beta > 1}$,

- при $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$ **,**

а выполняется только при $\beta = 1$.

Таким образом, исходя из того, что в отдельном примере происходит невыполнение закона сохранения импульса замкнутой механической системы тел, можно сделать неутешительный вывод:

- в однонаправленных инерциальных системах отсчета коэффициент перехода β не может быть больше или меньше 1, а может быть только равен 1 ;

- в инерциальных системах отсчета коэффициент перехода β не зависит от величины скорости V движения инерциальных систем отсчета.

Здесь также следует отметить, что вывод сделан только для случая однородности и изотропности пространства и однородности времени.

Данный вывод может оказаться неправильным, если удастся доказать, что функция **f (V)** может быть представлена не только функциями $\mathbf{f\,(V)}_{>}$ (формула (110)) и $\mathbf{f\,(V)}_{<}$ (формула (131)).

P.S.: Основные идеи изложены в статье "Комментарии к специальной теории относительности", напечатанной в журнале "Актуальные проблемы современной науки" (ISSN 1680-2721) № 6 (33) за 2006 год.

Автор В.Н. Кочетков

Статья "Специальная теория относительности без постулата о постоянстве скорости света" напечатана в журнале "Актуальные проблемы современной науки" (ISSN 1680-2721) № 1 (34) за 2007 год.