Рубрика: математическая физика.

Тематика: специальная теория относительности.

Кочетков Виктор Николаевич

главный специалист ФГУП «Центр эксплуатации объектов наземной космической инфраструктуры» (ФГУП «ЦЭНКИ»)

КОММЕНТАРИИ К СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В данной статье делается попытка определения пространственно-временной связи для инерциальных систем отсчета.

1. Основные уравнения специальной теории относительности

Предположим, что имеются две инерциальные системы отсчета неподвижная $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижная $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, изображенные на рис.1 и у которых:

- сходные оси декартовых координат систем $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ попарно параллельны и одинаково направлены;

- система $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, движется относительно системы $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ с постоянной скоростью $\mathbf{V_2}$ относительно оси $\mathbf{Ox_1}$;

- в качестве начала отсчета времени ($\mathbf{t_1}$=0 и $\mathbf{t_2}$=0) в обеих системах выбран тот момент, когда начала координат $\mathbf{O_1}$ и $\mathbf{O_2}$ этих систем совпадают.

Исходя из симметрии пространства и времени (однородности и изотропности пространства и однородности времени), соотношения между координатами и временем одного и того же события в двух инерциальных системах отсчета неподвижной $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижной $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ могут быть записаны следующим образом:

$$x_1 = \beta_1 \cdot (x_2 + V_1 \cdot t_2) \qquad (1)$$

$$x_2 = \beta_2 \cdot (x_1 + V_2 \cdot t_1) \qquad (2)$$

$$y_1 = \beta_3 \cdot y_2 \qquad (3)$$

$$y_2 = \beta_4 \cdot y_1 \qquad (4)$$

$$z_1 = \beta_5 \cdot z_2 \qquad (5)$$

$$z_2 = \beta_6 \cdot z_1 \qquad (6)$$

где: $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{z_1}$ и $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{y_2}$, $\mathbf{z_2}$ – координаты точки **A** в системах отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ соответственно;

$\mathbf{t_1}$ и $\mathbf{t_2}$ - значения времени в системах отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ соответственно;

$\boldsymbol{\beta_1}$, $\boldsymbol{\beta_2}$, $\boldsymbol{\beta_3}$, $\boldsymbol{\beta_4}$, $\boldsymbol{\beta_5}$ и $\boldsymbol{\beta_6}$ - коэффициенты перехода;

$\mathbf{V_1}$ - скорость движения система $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ относительно системы $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$.

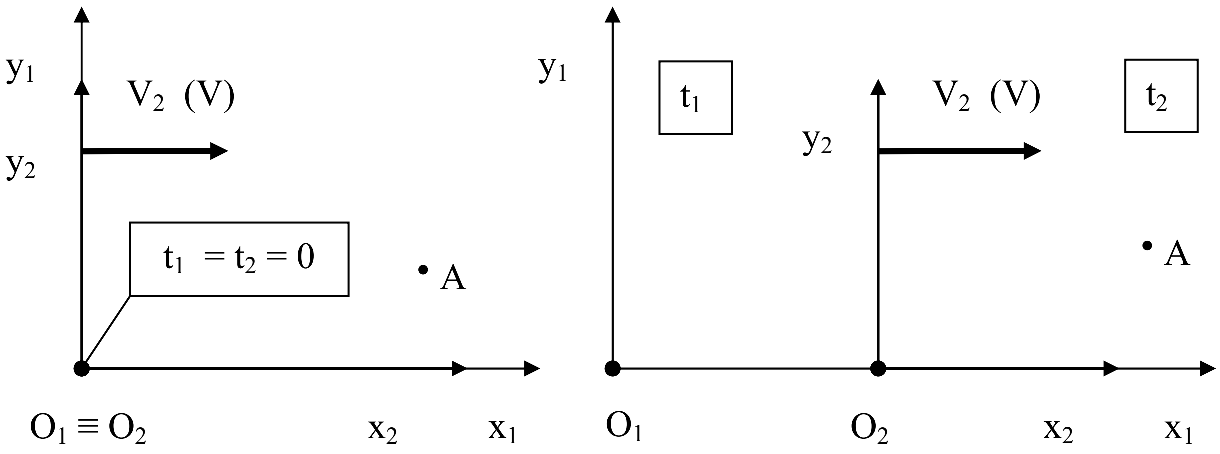

Рис. 1

Использование принципа относительности и симметрии пространства и времени позволяет получить:

$$V_1 = -V_2 = V \qquad (7)$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta \qquad (8)$$

$$\beta_3 = \beta_4 = 1 \qquad (9)$$

$$\beta_5 = \beta_6 = 1 \qquad (10)$$

При этом система уравнений (1)-:-(6) упростится и примет вид:

$$x_1 = \beta \cdot (x_2 + V \cdot t_2) \qquad (11),$$

$$x_2 = \beta \cdot (x_1 - V \cdot t_1) \qquad (12)$$

$$y_1 = y_2 \qquad (13)$$

$$z_1 = z_2 \qquad (14)$$

Причем коэффициент перехода **β** не зависит от значений координат $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{y_2}$, $\mathbf{z_2}$ и времени $\mathbf{t_1}$ и $\mathbf{t_2}$, а предположительно может являться функцией скорости **V** перемещения систем отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ относительно друг друга.

Из формул (11) и (12) можно записать зависимость для значений времен $\mathbf{t_1}$ и $\mathbf{t_2}$:

$$t_1 = \{[(\beta^2 - 1) \cdot x_2] / (\beta \cdot V)\} + (\beta \cdot t_2) \qquad (15)$$

$$t_2 = \{[(1 - \beta^2) \cdot x_1] / (\beta \cdot V)\} + (\beta \cdot t_1) \qquad (16)$$

Про коэффициент перехода **β** в формулах (11) и (12) можно сказать следующее:

- исходя из принципа относительности, симметрии пространства и времени коэффициент перехода **β** может быть только действительной величиной;

- коэффициент перехода **β** будет равен 1 при **V** = 0;

- коэффициент перехода **β** будет равен 1, если коэффициент перехода **β** не будет зависеть от величины скорости **V**;

- при принятом направлении оси декартовых координат систем $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ коэффициент перехода **β** будет больше 0 , так как отрицательные значения коэффициент перехода **β** будет иметь при разной направленности осей $\mathbf{Ox_1}$ и $\mathbf{O_2x_2}$;

- при значении коэффициента перехода **β** > 1 линейный размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, уменьшается в направлении движения и ход времени часов, движущихся относительно инерциальной системы отсчета, замедляется;

- при значении коэффициента перехода 0 < **β** < 1 линейный размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, увеличивается в направлении движения и ход времени часов, движущихся относительно инерциальной системы отсчета, ускоряется;

- принцип относительности и симметрия пространства и времени определяют также, что в случае зависимости коэффициент перехода **β** от величины скорости **V** величина коэффициента перехода **β** однозначно зависит от величины скорости **V** (т.е. одному конкретному значению скорости **V** может соответствовать только одно конкретное значение коэффициента перехода **β**).

Формулы (11) -:- (14) однозначно определяют связь между координатами $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{y_1}$ и $\mathbf{z_1}$ точки **A** и временем $\mathbf{t_1}$ в неподвижной системе $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и координатами $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{y_2}$ и $\mathbf{z_2}$ этой же точки **A** и временем $\mathbf{t_2}$ в подвижной системе $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$.

Используя формулы (11) -:- (16) может быть получена однозначная связь между проекциями $\mathbf{v_{x2}}$, $\mathbf{v_{y2}}$ и $\mathbf{v_{z2}}$ скорости движения точки **A** в подвижной системе $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ на оси декартовых координат и аналогичными проекциями $\mathbf{v_{x1}}$, $\mathbf{v_{y1}}$ и $\mathbf{v_{z1}}$ скорости этой точки **A** в неподвижной системе $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

$$v_{x1} = (v_{x2} + V) / \boldsymbol{\{}\{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta^2 \cdot V)\} + 1\boldsymbol{\}} \qquad (17)$$

$$v_{x2} = (v_{x1} - V) / \boldsymbol{\{}\{[(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta^2 \cdot V)\} + 1\boldsymbol{\}} \qquad (18)$$

$$v_{y1} = v_{y2} / \boldsymbol{\{}\{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\}} \qquad (19)$$

$$v_{y2} = v_{y1} / \boldsymbol{\{}\{[(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\}} \qquad (20)$$

$$v_{z1} = v_{z2} / \boldsymbol{\{}\{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\}} \qquad (21)$$

$$v_{z2} = v_{z1} / \boldsymbol{\{}\{[(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\}} \qquad (22)$$

Используя формулу (17) для случая, когда коэффициент перехода **β** > 1 при действительных значениях **V**, $\mathbf{v_{x1}}$, $\mathbf{v_{x2}}$ можно отметить, что:

- при положительных значениях $\mathbf{v_{x2}}$:

$$v_{x1} \leq (v_{x2} + V) \qquad (23)$$

- при отрицательных значениях $\mathbf{v_{x2}}$:

$$v_{x1} \geq (v_{x2} + V) \qquad (24)$$

Неравенства (23) и (24) не исключают, что при **β** > 1 возможно существование такого действительного значения скорости $\mathbf{v_{x1}}$ движения точки в неподвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$, которое было бы равно значению скорости $\mathbf{v_{x2}}$ движения этой же точки в подвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$.

А используя формулу (17) для случая, когда коэффициент перехода $0 < \boldsymbol{\beta} < 1$ при действительных значениях $\mathbf{V}$, $\mathbf{v_{x1}}$, $\mathbf{v_{x2}}$ можно отметить, что:

- при положительных значениях $\mathbf{v_{x2}}$:

$$v_{x1} \geq (v_{x2} + V) \qquad (25)$$

или при $\mathbf{V} \neq 0$:

$$v_{x1} > v_{x2} \qquad (26)$$

- при отрицательных значениях $\mathbf{v_{x2}}$:

$$v_{x1} \leq (v_{x2} + V) \qquad (27)$$

Неравенства (25) -:- (27) показывают, что при $0 < \boldsymbol{\beta} < 1$ не может существовать такое действительное значение скорости $\mathbf{v_{x1}}$ движения точки в неподвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$, которое было бы равно значению скорости $\mathbf{v_{x2}}$ движения этой же точки в подвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$.

Из формул (15) -:- (22) может быть получена однозначная связь между проекциями $\boldsymbol{a_{x2}}$, $\boldsymbol{a_{y2}}$ и $\boldsymbol{a_{z2}}$ ускорения точки **А** в подвижной системе $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ на оси декартовых координат и аналогичными проекциями $\boldsymbol{a_{x1}}$, $\boldsymbol{a_{y1}}$ и $\boldsymbol{a_{z1}}$ ускорения этой точки **А** в неподвижной системе $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

$$a_{x1} = (a_{x2} \cdot \beta^{-3}) / \boldsymbol{\{}\{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta^2 \cdot V)\} + 1\boldsymbol{\}}^3 \qquad (28)$$

$$a_{x2} = (a_{x1} \cdot \beta^{-3}) / \boldsymbol{\{}\{[(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta^2 \cdot V)\} + 1\boldsymbol{\}}^3 \qquad (29)$$

$$a_{y1} = \frac{\boldsymbol{(}a_{y2} \cdot \boldsymbol{\{}\{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\})} - \{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{y2} \cdot a_{x2}] / (\beta \cdot V)\}}{\boldsymbol{\{}\{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\}}^3} \qquad (30)$$

$$a_{y2} = \frac{\boldsymbol{(}a_{y1} \cdot \boldsymbol{\{}\{[(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\})} - \{[(1 - \beta^2) \cdot v_{y1} \cdot a_{x1}] / (\beta \cdot V)\}}{\boldsymbol{\{}\{[(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\}}^3} \qquad (31)$$

$$a_{z1} = \frac{\boldsymbol{(}a_{z2} \cdot \boldsymbol{\{}\{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\})} - \{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{z2} \cdot a_{x2}] / (\beta \cdot V)\}}{\boldsymbol{\{}\{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\}}^3} \qquad (32)$$

$$a_{z2} = \frac{\boldsymbol{(}a_{z1} \cdot \boldsymbol{\{}\{[(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\})} - \{[(1 - \beta^2) \cdot v_{z1} \cdot a_{x1}] / (\beta \cdot V)\}}{\boldsymbol{\{}\{[(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\}}^3} \qquad (33)$$

2. Определение особой скорости

Допустим, что существует такое значение $\mathbf{V_{xкр}}$ проекции $\mathbf{v_{x1}}$ скорости движения точки **А** в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$, которому бы соответствовала значение проекции $\mathbf{v_{x2}}$ скорости движения точки **А** в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, равное $\mathbf{V_{xкр}}$, т.е. когда:

$$v_{x1} = v_{x2} = V_{xкр} \qquad (34)$$

Подставив значение (34) в формулу (17) или (18), получим:

$$V_{xкр}^{\ 2} = (\beta^2 \cdot V^2) / (\beta^2 - 1) \qquad (35)$$

Из формулы (35) следует зависимость $\mathbf{V_{xкр}}$ от величины скорости **V** для любого возможного значения скорости **V**:

$$V_{xкр} = \pm (\beta \cdot V) / (\beta^2 - 1)^{1/2} \qquad (36)$$

В случае если коэффициент перехода $\boldsymbol{\beta}$ имеет значение $\boldsymbol{\beta > 1}$, получим, что $\mathbf{V_{xкр}}$ будет иметь действительное значение (что находится в соответствии с условиями (23) и (24)) и ее для дальнейшего рассмотрения запишем, как :

$$V_{xкр} = v_{xкр1} = \pm (\beta \cdot V) / (\beta^2 - 1)^{1/2} \qquad (37)$$

где: $\mathbf{v_{xкр1}}$ - действительная величина, имеющая размерность скорости.

А в случае если коэффициент перехода $\boldsymbol{\beta}$ имеет значение $\mathbf{0 < \boldsymbol{\beta} < 1}$, получим, что $\mathbf{V_{xкр}}$ будет иметь мнимое значение (что находится в соответствии с условиями (25) -:- (27)) и которую для дальнейшего рассмотрения запишем, как :

$$V_{xкр} = \acute{\imath} \cdot v_{xкр2} = \pm (\acute{\imath} \cdot \beta \cdot V) / (1 - \beta^2)^{1/2} \qquad (38)$$

где: $\mathbf{v_{xкр2}}$ - действительная величина, имеющая размерность скорости.

Из формулы (35) можно получить зависимость коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ от величины скорости **V** для любого возможного значения скорости **V** :

$$\beta^2 = 1 / [1 - (V^2 / V_{xкр}^{\ 2})] \qquad (39)$$

Тогда из формулы (39) с учетом формулы (37) для коэффициента перехода **β**, имеющего значения **β > 1** и который обозначим как $\beta_>$, можно записать:

$$\beta_>^{\,2} = 1 / [1 - (V^2 / v_{xкр1}^{\,2})] \qquad (40)$$

А из формулы (39) с учетом формулы (38) для коэффициента перехода **β**, имеющего значения **0<β< 1** и который обозначим как $\beta_<$, можно записать:

$$\beta_<^{\,2} = 1 / [1 + (V^2 / v_{xкр2}^{\,2})] \qquad (41)$$

3. Уравнение связи для коэффициентов перехода

Рассмотрим три инерциальные системы отсчета неподвижной $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижные $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ и $\mathbf{O_3x_3y_3z_3}$, показанные на рис.2 и у которых:

- сходные оси декартовых координат систем $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$, $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ и $\mathbf{O_3x_3y_3z_3}$ попарно параллельны и одинаково направлены;

- система $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, движется относительно системы $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ с постоянной скоростью $\mathbf{V_2}$ относительно оси $\mathbf{Ox_1}$;

- система $\mathbf{O_3x_3y_3z_3}$, движется относительно системы $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ с постоянной скоростью $\mathbf{V_3}$ относительно оси $\mathbf{Ox_1}$;

- в качестве начала отсчета времени ($\mathbf{t_1}$=0 , $\mathbf{t_2}$=0 и $\mathbf{t_2}$=0) в этих трех системах выбран тот момент, когда их начала координат $\mathbf{O_1}$, $\mathbf{O_2}$ и $\mathbf{O_3}$ совпадают.

Опираясь на формулу (18) можно определить значение скорости $\mathbf{V_{23}}$ движения точки $\mathbf{O_3}$ относительно точки $\mathbf{O_2}$:

$$V_{23} = (V_3 - V_2) / \boldsymbol{\{}\{[(1 - \beta_2^{\,2}) \cdot V_3] / (\beta_2^{\,2} \cdot V_2)\} + 1\boldsymbol{\}} \qquad (42)$$

и значение скорости $\mathbf{V_{32}}$ движения точки $\mathbf{O_2}$ относительно точки $\mathbf{O_3}$:

$$V_{32} = (V_2 - V_3) / \boldsymbol{\{}\{[(1 - \beta_3^{\,2}) \cdot V_2] / (\beta_3^{\,2} \cdot V_3)\} + 1\boldsymbol{\}} \qquad (43)$$

где: $\boldsymbol{\beta_2}$ и $\boldsymbol{\beta_3}$ - коэффициенты перехода для инерциальных систем отсчета, движущихся относительно неподвижной системы отсчета со скоростью $\mathbf{V_2}$ и $\mathbf{V_3}$ соответственно.

Используя принцип относительности, согласно которому точка $\mathbf{O_3}$ будет удаляться относительно точки $\mathbf{O_2}$ со скоростью, равной по абсолютной величине и противоположно направленной скорости, с которой точка $\mathbf{O_2}$ удаляется относительно точки $\mathbf{O_3}$, т.е.:

$$V_{32} = - V_{23} \qquad (44)$$

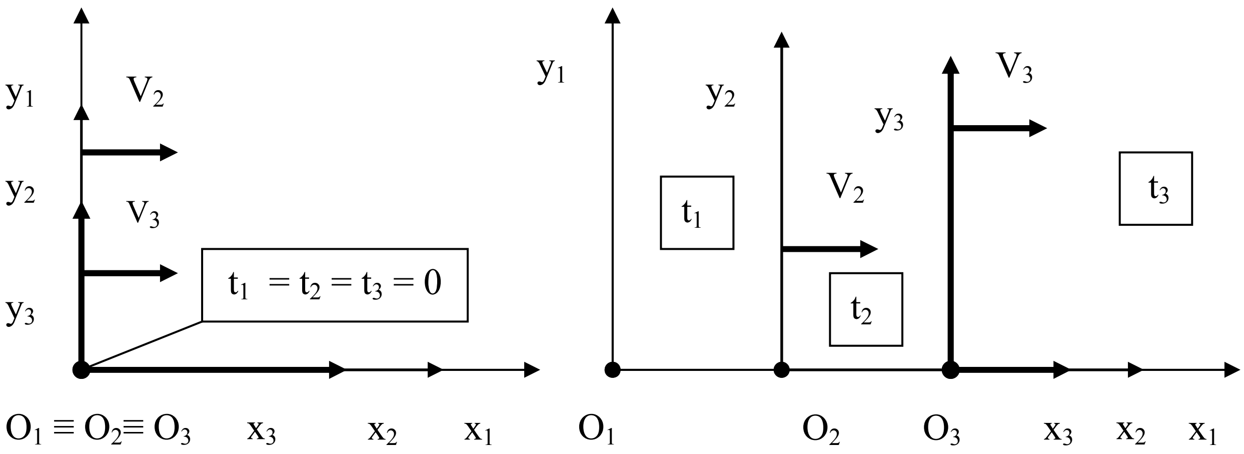

Рис. 2

Подставив уравнение (44) в формулы (42) и (43) получим:

$$\{[(1 - \beta_2^2) \cdot V_3] / (\beta_2^2 \cdot V_2)\} + 1 = \{[(1 - \beta_3^2) \cdot V_2] / (\beta_3^2 \cdot V_3)\} + 1 \qquad (45)$$

Отсюда уравнение для коэффициентов перехода $\boldsymbol{\beta_2}$ и $\boldsymbol{\beta_3}$ запишется следующим образом:

$$\beta_3^2 = (\beta_2^2 \cdot V_2) / [V_3^2 - (\beta_2^2 \cdot V_3) + (\beta_2^2 \cdot V_2)] \qquad (46)$$

4. Получение зависимостей для коэффициентов перехода

Из уравнения (45) можно получить формулу:

$$(\beta_2^2 - 1) / (\beta_2^2 \cdot V_2^2) = (\beta_3^2 - 1) / (\beta_3^2 \cdot V_3^2) \qquad (47)$$

Так как величины коэффициентов перехода $\boldsymbol{\beta_2}$ и $\boldsymbol{\beta_3}$ не зависят друг от друга, а зависят только от величин скоростей $\mathbf{V_2}$ и $\mathbf{V_3}$ соответственно, и величины скоростей $\mathbf{V_2}$ и $\mathbf{V_3}$ задавались произвольно (также не зависят друг от друга), то можно сказать, что:

$$(\beta_2^2 - 1) / (\beta_2^2 \cdot V_2^2) = (\beta_3^2 - 1) / (\beta_3^2 \cdot V_3^2) = К = \mathbf{Const} \qquad (48)$$

т.е. получается в общем виде, что:

$$(\beta^2 - 1) / (\beta^2 \cdot V^2) = К = \mathbf{Const} \qquad (49)$$

где: **К** - постоянная величина, независящая от величины скорости **V**

(**V_2** и **V_3**) и величины коэффициента перехода **β** (**$β_2$** и **$β_3$**) и имеющая размерность обратную квадрата скорости.

Из формулы (49) при величине коэффициента перехода **β > 1** константа **К** будет иметь действительное положительное значение и ее для дальнейшего рассмотрения запишим, как:

$$К = К_{>} = (β_{>}^2 - 1) / (β_{>}^2 \cdot V^2) \qquad (50)$$

где: **$К_{>}$** - положительная постоянная величина, независящая от величины скорости **V** и величины коэффициента перехода **β** (в диапазоне значений **β** > 1);

$β_{>}$ - коэффициент перехода **β** , значения которого находятся в диапазоне значений **β > 1** .

А из формулы (49) при величине коэффициента перехода **0 < β < 1** константа **К** будет иметь действительное отрицательное значение и которую для дальнейшего рассмотрения запишим, как:

$$К = К_{<} = (β_{<}^2 - 1) / (β_{<}^2 \cdot V^2) \qquad (51)$$

где: **$К_{<}$** - отрицательная постоянная величина, независящая от величины скорости **V** и величины коэффициента перехода **β** (в диапазоне значений **0 < β < 1**);

$β_{<}$ - коэффициент перехода **β** , значения которого находятся в диапазоне значений **0 < β < 1** .

Но так как константа **К** не зависит от величины скорости **V** и величины коэффициента перехода **β** для любого значения величины скорости **V**, получается, что константа **К** не может быть одновременно положительной величиной (**$К_{>}$**) и отрицательной величиной (**$К_{<}$**), т.е. для всех возможных значений скорости **V** значения коэффициента перехода **β** могут находится только в диапазоне **β > 1** или только в диапазоне **0 < β < 1** (естественно возможно, что **β = 1**).

Одним словом **β > 1** и **0 < β < 1** являются двумя взаимноисключающими диапазонами коэффициента перехода **β** , т.е. все значения коэффициента перехода **β** в зависимости от величины скорости **V** находятся только в диапазоне $\boldsymbol{\beta} > \mathbf{1}$ или в диапазоне $\mathbf{0} < \boldsymbol{\beta} < \mathbf{1}$.

Основная задача заключается в выборе одного из этих двух диапазонов, в котором будет в действительности определяться величина коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ в зависимости от величины скорости $\mathbf{V}$ (если $\boldsymbol{\beta}$ зависит от $\mathbf{V}$).

Из уравнения (49) можно получить формулу для коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$:

$$\beta^2 = 1 / [1 - (К \cdot V^2)] \qquad (52)$$

Если вернуться к формуле (39):

$$\beta^2 = 1 / [1 - (V^2 / V_{хкр}{}^2)] \qquad (39)$$

и сравнить ее с формулой (52), то можно отметить, что:

$$К = 1 / V_{хкр}{}^2 \qquad (53)$$

т.е. $\mathbf{V_{хкр}{}^2}$ будет являться постоянной величиной, независящей от скорости $\mathbf{V}$.

Для случая коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta} > \mathbf{1}$ формула (52) с учетом формулы (50) примет вид:

$$\beta_>{}^2 = 1 / [1 - (К_> \cdot V^2)] \qquad (54)$$

А для случая коэффициента перехода $\mathbf{0} < \boldsymbol{\beta} < \mathbf{1}$ формула (52) с учетом формулы (51) примет вид:

$$\beta_<{}^2 = 1 / [1 - (К_< \cdot V^2)] \qquad (55)$$

Если вернуться к формулам (40) и (41):

$$\beta_>{}^2 = 1 / [1 - (V^2 / v_{хкр1}{}^2)] \qquad (40)$$

$$\beta_<{}^2 = 1 / [1 + (V^2 / v_{хкр2}{}^2)] \qquad (41)$$

и сравнивая их с формулами (54) и (55), то можно отметить, что:

$$К_> = 1 / v_{хкр1}{}^2 \qquad (56)$$

$$К_< = - (1 / v_{хкр2}{}^2) \qquad (57)$$

А учитывая, что $\mathbf{К_>}$ и $\mathbf{К_<}$ являются постоянными величинами, независящими от величины скорости $\mathbf{V}$ перемещения подвижной системы отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ относительно покоящейся системы $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$, можно сделать следующий вывод:

что $\mathbf{v_{xкр1}}$ и $\mathbf{v_{xкр2}}$ тоже являются постоянными величинами, не зависящими от величины скорости **V**, т.е.:

$$\mathbf{v_{xкр1} = Const} \qquad (58)$$

$$\mathbf{v_{xкр2} = Const} \qquad (59)$$

А возвращаясь к формуле (37) с учетом формулы (58) можно отметить, что в случае, если коэффициент перехода $\boldsymbol{\beta > 1}$, то должна существовать величина скорости $\mathbf{V_{xкр}}$ (равная $\mathbf{v_{xкр1}}$) движения точки, которая была бы инвариантна во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета.

Формулы (38) и (59) показывают, что для случая, если коэффициент перехода $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$, то особая скорость $\mathbf{V_{xкр}}$ (равная $(\boldsymbol{i} \cdot \mathbf{v_{xкр2}})$) будет величиной мнимой постоянной и инвариантной во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета.

5. Основные уравнения специальной теории относительности при β > 1

Подставив формулу (40) в уравнения (11), (12), (15)-:-(22) и (28)-:-(33), получим следующую систему уравнений при коэффициенте перехода $\boldsymbol{\beta = \beta_{>}}$:

$$x_{1>} = [x_{2>} + (V \cdot t_{2>})] / [1 - (V^2 / v_{xкр1}{}^2)]^{1/2} \qquad (60)$$

$$x_{2>} = [x_{1>} - (V \cdot t_{1>})] / [1 - (V^2 / v_{xкр1}{}^2)]^{1/2} \qquad (61)$$

$$t_{1>} = \{t_{2>} + [(V \cdot x_{2>}) / v_{xкр1}{}^2]\} / [(1 - V^2/v_{xкр1}{}^2)^{1/2}] \qquad (62)$$

$$t_{2>} = \{t_{1>} - [(V \cdot x_{1>}) / v_{xкр1}{}^2]\} / [(1 - V^2/v_{xкр1}{}^2)^{1/2}] \qquad (63)$$

$$v_{x1>} = (v_{x2>} + V) / \{1 + [(V \cdot v_{x2>}) / v_{xкр1}{}^2)]\} \qquad (64)$$

$$v_{x2>} = (v_{x1>} - V) / \{1 - [(V \cdot v_{x1>}) / v_{xкр1}{}^2)]\} \qquad (65)$$

$$v_{y1>} = \{v_{y2>} \cdot [1 - (V^2 / v_{xкр1}{}^2)]^{1/2}\} / \{1 + [(V \cdot v_{x2>}) / v_{xкр1}{}^2)]\} \qquad (66)$$

$$v_{y2>} = \{v_{y1>} \cdot [1 - (V^2 / v_{xкр1}{}^2)]^{1/2}\} / \{1 - [(V \cdot v_{x1>}) / v_{xкр1}{}^2)]\} \qquad (67)$$

$$v_{z1>} = \{v_{z2>} \cdot [1 - (V^2 / v_{xкр1}{}^2)]^{1/2}\} / \{1 + [(V \cdot v_{x2>}) / v_{xкр1}{}^2)]\} \qquad (68)$$

$$v_{z2>} = \{v_{z1>} \cdot [1 - (V^2 / v_{xкр1}{}^2)]^{1/2}\} / \{1 - [(V \cdot v_{x1>}) / v_{xкр1}{}^2)]\} \qquad (69)$$

$$a_{x1>} = \{a_{x2>} \cdot [1 - (V^2 / v_{xкр1}{}^2)]^{3/2}\} / \{1 + [(V \cdot v_{x2>}) / v_{xкр1}{}^2)]\}^3 \qquad (70)$$

$$a_{x2>} = \{a_{x1>} \cdot [1 - (V^2 / v_{xкр1}{}^2)]^{3/2}\} / \{1 - [(V \cdot v_{x1>}) / v_{xкр1}{}^2)]\}^3 \qquad (71)$$

$$a_{y1>} = \frac{[\{\{1+[(V\cdot v_{x2>})/v_{x\text{кр}1}^{2})]\}\cdot a_{y2>}\}\} - [(V\cdot v_{y2>}\cdot a_{x2>})/v_{x\text{кр}1}^{2}]] \cdot [1-(V^{2}/v_{x\text{кр}1}^{2})]}{\{1+[(V\cdot v_{x2>})/ v_{x\text{кр}1}^{2})]\}^{3}} \tag{72}$$

$$a_{y2>} = \frac{[\{\{1-[(V\cdot v_{x1>})/v_{x\text{кр}1}^{2})]\}\cdot a_{y1>}\}\} + [(V\cdot v_{y1>}\cdot a_{x1>})/v_{x\text{кр}1}^{2}]] \cdot [1-(V^{2}/v_{x\text{кр}1}^{2})]}{\{1-[(V\cdot v_{x1>})/ v_{x\text{кр}1}^{2})]\}^{3}} \tag{73}$$

$$a_{z1>} = \frac{[\{\{1+[(V\cdot v_{x2>})/v_{x\text{кр}1}^{2})]\}\cdot a_{z2>}\}\} - [(V\cdot v_{z2>}\cdot a_{x2>})/v_{x\text{кр}1}^{2}]] \cdot [1-(V^{2}/v_{x\text{кр}1}^{2})]}{\{1+[(V\cdot v_{x2>})/ v_{x\text{кр}1}^{2})]\}^{3}} \tag{74}$$

$$a_{z2>} = \frac{[\{\{1-[(V\cdot v_{x1>})/v_{x\text{кр}1}^{2})]\}\cdot a_{z1>}\}\} + [(V\cdot v_{z1>}\cdot a_{x1>})/v_{x\text{кр}1}^{2}]] \cdot [1-(V^{2}/v_{x\text{кр}1}^{2})]}{\{1-[(V\cdot v_{x1>})/ v_{x\text{кр}1}^{2})]\}^{3}} \tag{75}$$

6. Основные уравнения специальной теории относительности при 0 < β < 1

Подставив формулу (41) в уравнения (11), (12), (15)-:-(22) и (28)-:-(33), получим систему уравнений для случая когда коэффициент перехода **$\beta = \beta_{<}$**:

$$x_{1<} = [x_{2<} + (V\cdot t_{2<})] / [1 + (V^{2} / v_{x\text{кр}2}^{2})]^{1/2} \tag{76}$$

$$x_{2<} = [x_{1<} - (V\cdot t_{1<})] / [1 + (V^{2} / v_{x\text{кр}2}^{2})]^{1/2} \tag{77}$$

$$t_{1<} = \{t_{2<} - [(V\cdot x_{2<}) / v_{x\text{кр}2}^{2}]\} / [(1 + V^{2}/v_{x\text{кр}2}^{2})^{1/2}] \tag{78}$$

$$t_{2<} = \{t_{1<} + [(V\cdot x_{1<}) / v_{x\text{кр}2}^{2}]\} / [(1 + V^{2}/v_{x\text{кр}2}^{2})^{1/2}] \tag{79}$$

$$v_{x1<} = (v_{x2<} + V) / \{1 - [(V\cdot v_{x2<})/ v_{x\text{кр}2}^{2})]\} \tag{80}$$

$$v_{x2<} = (v_{x1<} - V) / \{1 + [(V\cdot v_{x1<})/ v_{x\text{кр}2}^{2})]\} \tag{81}$$

$$v_{y1<} = \{v_{y2<}\cdot [1 + (V^{2} / v_{x\text{кр}2}^{2})]^{1/2}\} / \{1 - [(V\cdot v_{x2<})/ v_{x\text{кр}2}^{2})]\} \tag{82}$$

$$v_{y2<} = \{v_{y1<}\cdot [1 + (V^{2} / v_{x\text{кр}2}^{2})]^{1/2}\} / \{1 + [(V\cdot v_{x1<})/ v_{x\text{кр}2}^{2})]\} \tag{83}$$

$$v_{z1<} = \{v_{z2<}\cdot [1 + (V^{2} / v_{x\text{кр}2}^{2})]^{1/2}\} / \{1 - [(V\cdot v_{x2<})/ v_{x\text{кр}2}^{2})]\} \tag{84}$$

$$v_{z2<} = \{v_{z1<}\cdot [1 + (V^{2} / v_{x\text{кр}2}^{2})]^{1/2}\} / \{1 + [(V\cdot v_{x1<})/ v_{x\text{кр}2}^{2})]\} \tag{85}$$

$$a_{x1<} = \{a_{x2<}\cdot [1 + (V^{2} / v_{x\text{кр}2}^{2})]^{3/2}\} / \{1 - [(V\cdot v_{x2<})/ v_{x\text{кр}2}^{2})]\}^{3} \tag{86}$$

$$a_{x2<} = \{a_{x1<}\cdot [1 + (V^{2} / v_{x\text{кр}2}^{2})]^{3/2}\} / \{1 + [(V\cdot v_{x1<})/ v_{x\text{кр}2}^{2})]\}^{3} \tag{87}$$

$$a_{y1<} = \frac{[\{\{1-[(V\cdot v_{x2<})/v_{x\text{кр}2}^{2})]\}\cdot a_{y2<}\}\} + [(V\cdot v_{y2<}\cdot a_{x2<})/v_{x\text{кр}2}^{2}]] \cdot [1+(V^{2}/v_{x\text{кр}2}^{2})]}{\{1-[(V\cdot v_{x2<})/ v_{x\text{кр}2}^{2})]\}^{3}} \tag{88}$$

$$a_{y2<} = \frac{\boldsymbol{[}\boldsymbol{\{}\{1+[(V\cdot v_{x1<})/v_{xкр2}^{2})]\}\cdot a_{y1<}\}\boldsymbol{\}}-[(V\cdot v_{y1<}\cdot a_{x1<})/v_{xкр2}^{2}]\boldsymbol{]}\cdot[1+(V^2/v_{xкр2}^{2})]}{\{1+[(V\cdot v_{x1<})/v_{xкр2}^{2})]\}^3} \quad (89)$$

$$a_{z1<} = \frac{\boldsymbol{[}\boldsymbol{\{}\{1-[(V\cdot v_{x2<})/v_{xкр2}^{2})]\}\cdot a_{z2<}\}\boldsymbol{\}}+[(V\cdot v_{z2<}\cdot a_{x2<})/v_{xкр2}^{2}]\boldsymbol{]}\cdot[1+(V^2/v_{xкр2}^{2})]}{\{1-[(V\cdot v_{x2<})/v_{xкр2}^{2})]\}^3} \quad (90)$$

$$a_{z2<} = \frac{\boldsymbol{[}\boldsymbol{\{}\{1+[(V\cdot v_{x1<})/v_{xкр2}^{2})]\}\cdot a_{z1<}\}\boldsymbol{\}}-[(V\cdot v_{z1<}\cdot a_{x1<})/v_{xкр2}^{2}]\boldsymbol{]}\cdot[1+(V^2/v_{xкр2}^{2})]}{\{1+[(V\cdot v_{x1<})/v_{xкр2}^{2})]\}^3} \quad (91)$$

7. Системы уравнений для определения зависимости массы движущегося тела от скорости

Воспользуемся принципом относительности, утверждающим, что физические законы инвариантны по отношению к выбору инерциальной системы отсчета, т.е. уравнения, выражающие эти законы, имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета.

Для определения зависимости массы движущегося тела от его скорости перемещения воспользуемся:

- законом сохранения импульса: **импульс замкнутой (на которую не действуют внешние силы) механической системы тел для любого момента времени являются величиной постоянной**;

- и законом сохранения механической энергии, а точнее его частным случаем, когда тела, составляющие замкнутую механическую систему тел, испытывают только абсолютно упругое взаимодействие: **кинетическая энергия замкнутой механической системы тел, испытывающих абсолютно упругое взаимодействие, для любого момента времени является величиной постоянной** (предполагая, что зависимость массы тела от скорости его движения не меняется при изменении потенциальной энергии тела).

Далее предположим, что масса **M(V)** материальной точки, движущейся со скоростью **V**, равна:

$$M(V) = M_o \cdot f(V) \quad (92)$$

где: $\mathbf{M_o}$ – масса рассматриваемой материальной точки в состоянии покоя;

f(V) – функция, предположительно зависящая от величины скорости **V**.

Исходя из формулы (92) импульс **P(V)** материальной точки, движущейся со скоростью **V**, равен:

$$P(V) = M_o \cdot f(V) \cdot V \qquad (93)$$

А формула (93) позволяет записать следующее уравнение для кинетической энергии $\mathbf{E_к(V)}$ материальной точки, движущейся со скоростью **V**:

$$E_к(V) = M_o \cdot \int_0^V \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \qquad (94)$$

где: **f′ (V) –** производная функции **f (V)** .

С целью написания системы уравнений, позволяющих определить значение функции **f (V)**, рассмотрим два простейших примера.

Пример № 1

Допустим, что имеются две инерциальные системы отсчета, аналогичные системам отсчета, изображенным на рис.1, неподвижная $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижная $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, которая бы двигалась со скоростью **V** параллельно оси $\mathbf{O_1x_1}$ относительно системы $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$.

Предположим, что имеется замкнутая механическая система тел, состоящая из тела 1 и тела 2, как показано на рис.3, имеющих массы в состоянии покоя, равные $\mathbf{M_{o1}}$ и $\mathbf{M_{o2}}$ соответственно.

В подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ тела 1 и тела 2 до некоторого момента времени $\mathbf{t_{2c}}$ двигались параллельно оси $\mathbf{O_2x_2}$ по одной линии с постоянными по величине скоростями $\mathbf{v_{21xн}}$ и $\mathbf{v_{22xн}}$ соответственно.

В какой-то момент времени $\mathbf{t_{2c}}$ между телами 1 и 2 произошло абсолютно упругое прямое центральное столкновение.

Далее после столкновения в момент времени больший $\mathbf{t_{2c}}$ тела 1 и 2 двигаются параллельно оси $\mathbf{O_2x_2}$ по одной линии с постоянными по величине скоростями $\mathbf{v_{21хк}}$ и $\mathbf{v_{22хк}}$ соответственно.

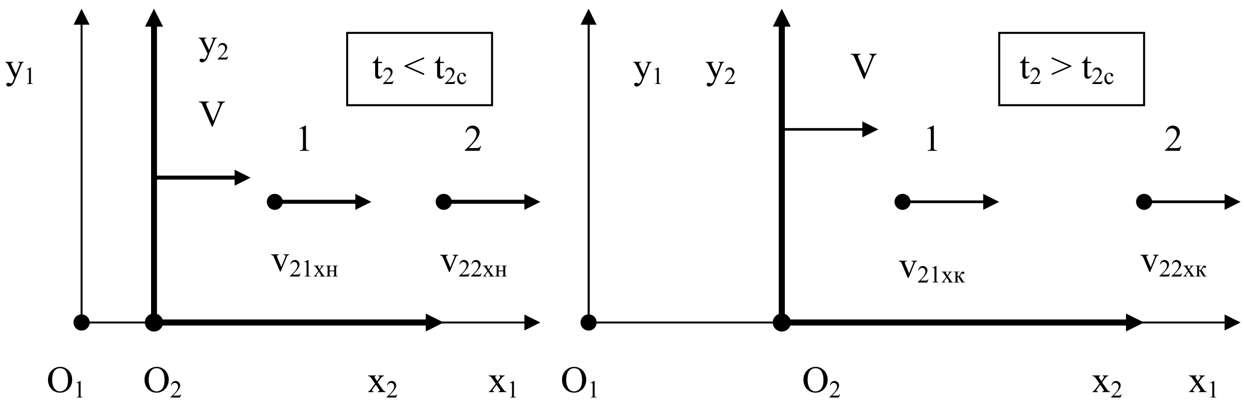

Рис. 3

Учитывая, что между телами 1 и 2 имело место прямое центральное столкновение и их можно рассматривать как материальные точки, запишем закон сохранения импульса для замкнутой механической системы тел 1 и 2 для моментов времени меньшего и большего чем $\mathbf{t_{2c}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

$$[M_{o1} \cdot f\,(V= v_{21хн}) \cdot v_{21хн}] + [M_{o2} \cdot f\,(V= v_{22хн}) \cdot v_{22хн}] = [M_{o1} \cdot f\,(V= v_{21хк}) \cdot v_{21хк}] + [M_{o2} \cdot f\,(V= v_{22хк}) \cdot v_{22хк}] \qquad (95)$$

А используя то, что столкновение тел 1 и 2 носило абсолютно упругий характер, можно записать закон сохранения кинетической энергии для замкнутой механической системы тел 1 и 2 для моментов времени меньшего и большего чем $\mathbf{t_{2c}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

$$\boldsymbol{\{}\, M_{o1} \cdot \int_0^{v_{21хн}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}\, M_{o2} \cdot \int_0^{v_{22хн}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} =$$

$$\boldsymbol{\{}\, M_{o1} \cdot \int_0^{v_{21хк}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}\, M_{o2} \cdot \int_0^{v_{22хк}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} \qquad (96)$$

Все ранее сказанное о движении тел 1 и 2 в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ можно сказать и о движении тел 1 и 2 в неподвижной системе отчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$, за исключением того, что столкновение между телами 1 и 2 происходит в момент времени $\mathbf{t_{1c}}$, соответствующий моменту времени $\mathbf{t_{2c}}$ в системе $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, тело 1 имеет соответственно до и после столкновения скорости $\mathbf{v_{11хн}}$ и $\mathbf{v_{11хк}}$, соответствующие скоростям $\mathbf{v_{21хн}}$ и $\mathbf{v_{21хк}}$, а тело 2 имеет соответственно до и после столкновения скорости $\mathbf{v_{12хн}}$ и $\mathbf{v_{12хк}}$, соответствующие скоростям $\mathbf{v_{22хн}}$ и $\mathbf{v_{22хк}}$.

Аналогично формулам (95) и (96) можно записать закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии для замкнутой механической системы тел 1 и 2 для моментов времени меньшего и большего чем $\mathbf{t_{1c}}$ в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

$$[M_{o1} \cdot f\,(V= v_{11хн}) \cdot v_{11хн}] + [M_{o2} \cdot f\,(V= v_{12хн}) \cdot v_{12хн}] = [M_{o1} \cdot f\,(V= v_{11хк}) \cdot v_{11хк}] + [M_{o2} \cdot f\,(V= v_{12хк}) \cdot v_{12хк}] \qquad (97)$$

$$\boldsymbol{\{}\, M_{o1} \cdot \int_0^{v_{11хн}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}\, M_{o2} \cdot \int_0^{v_{12хн}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} =$$

$$\boldsymbol{\{}\, M_{o1} \cdot \int_0^{v_{11хк}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}\, M_{o2} \cdot \int_0^{v_{12хк}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} \qquad (98)$$

Пример № 2

Пример № 2 аналогичен примеру № 1 и отличается только тем, как показано на рис. 4, что в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ тела 1 и тела 2 двигаются не параллельно оси $\mathbf{O_2x_2}$, а параллельно оси $\mathbf{O_2y_2}$.

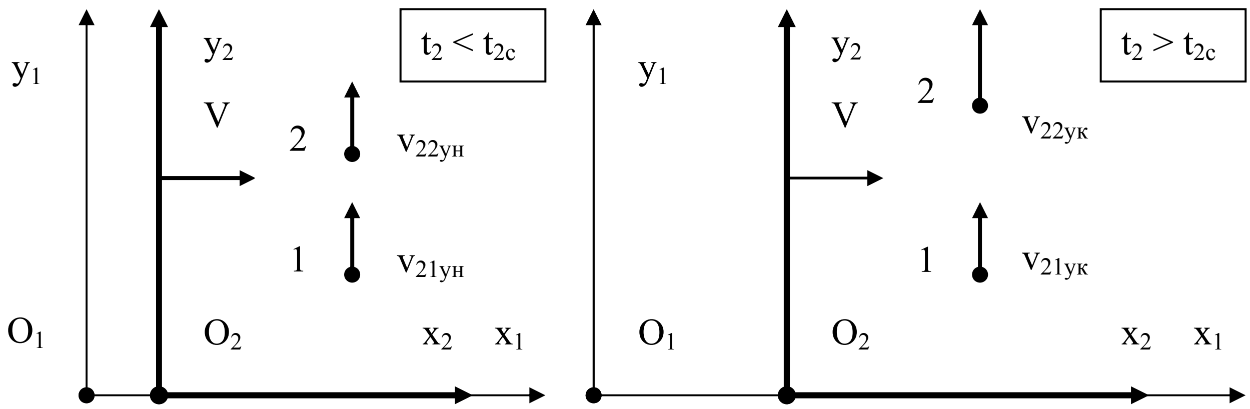

Рис. 4

В подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ тела 1 и тела 2 до некоторого момента времени $\mathbf{t_{2c}}$ двигались параллельно оси $\mathbf{O_2y_2}$ по одной линии с постоянными по величине скоростями $\mathbf{v_{21ун}}$ и $\mathbf{v_{22ун}}$ соответственно.

После столкновения в момент времени больший $\mathbf{t_{2c}}$ тела 1 и 2 двигаются параллельно оси $\mathbf{O_2y_2}$ по одной линии с постоянными по величине скоростями $\mathbf{v_{21ук}}$ и $\mathbf{v_{22ук}}$ соответственно.

Тогда можно записать закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии для замкнутой механической системы тел 1 и 2 для моментов времени меньшего и большего чем $\mathbf{t_{2c}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

$$[M_{o1} \cdot f\,(V= v_{21ун}) \cdot v_{21ун}] + [M_{o2} \cdot f\,(V= v_{22ун}) \cdot v_{22ун}] = [M_{o1} \cdot f\,(V= v_{21ук}) \cdot v_{21ук}] + [M_{o2} \cdot f\,(V= v_{22ук}) \cdot v_{22ук}] \qquad (99)$$

$$\{ M_{o1} \cdot \int_0^{v_{21ун}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{ M_{o2} \cdot \int_0^{v_{22ун}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} =$$

$$\{ M_{o1} \cdot \int_0^{v_{21ук}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{ M_{o2} \cdot \int_0^{v_{22ук}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} \qquad (100)$$

Аналогично можно записать закон сохранения импульса (два уравнения для проекций импульса на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$) и закон сохранения кинетической энергии для замкнутой механической системы тел 1 и 2 для моментов времени меньшего и большего чем $\mathbf{t_{1c}}$ в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

$$\{M_{o1} \cdot f\,[V = (v_{11ун}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} + \{M_{o2} \cdot f\,[V = (v_{12ун}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} =$$
$$\{M_{o1} \cdot f\,[V = (v_{11ук}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} + \{M_{o2} \cdot f\,[V = (v_{12ук}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} \qquad (101)$$

$$\{M_{o1} \cdot f\,[V = (v_{11ун}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{11ун}\} + \{M_{o2} \cdot f\,[V = (v_{12ун}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{12ун}\} =$$
$$\{M_{o1} \cdot f\,[V = (v_{11ук}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{11ук}\} + \{M_{o2} \cdot f\,[V = (v_{12ук}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{12ук}\} \qquad (102)$$

$$\{ M_{o1} \cdot \int_0^{(v_{11ун}{}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{ M_{o2} \cdot \int_0^{(v_{12ун}{}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} =$$

$$\{ M_{o1} \cdot \int_0^{(v_{11ук}{}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{ M_{o2} \cdot \int_0^{(v_{12ук}{}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} \qquad (103)$$

8. Формула массы движущегося тела при β > 1

С целью определения зависимости для массы движущегося тела при значении коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_{>}$ (т.е. $\boldsymbol{\beta} > \mathbf{1}$) составим следующую систему уравнений:

$$[M_{o1} \cdot f(V = v_{21хн}) \cdot v_{21хн}] + [M_{o2} \cdot f(V = v_{22хн}) \cdot v_{22хн}] = [M_{o1} \cdot f(V = v_{21хк}) \cdot v_{21хк}] + [M_{o2} \cdot f(V = v_{22хк}) \cdot v_{22хк}] \qquad (95)$$

$$\{M_{o1} \cdot \int_0^{v_{21хн}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{v_{22хн}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} =$$

$$\{M_{o1} \cdot \int_0^{v_{21хк}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{v_{22хк}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} \qquad (96)$$

$$[M_{o1} \cdot f(V = v_{11хн}) \cdot v_{11хн}] + [M_{o2} \cdot f(V = v_{12хн}) \cdot v_{12хн}] = [M_{o1} \cdot f(V = v_{11хк}) \cdot v_{11хк}] + [M_{o2} \cdot f(V = v_{12хк}) \cdot v_{12хк}] \qquad (97)$$

$$\{M_{o1} \cdot \int_0^{v_{11хн}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{v_{12хн}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} =$$

$$\{M_{o1} \cdot \int_0^{v_{11хк}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{v_{12хк}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} \qquad (98)$$

$$[M_{o1} \cdot f(V = v_{21ун}) \cdot v_{21ун}] + [M_{o2} \cdot f(V = v_{22ун}) \cdot v_{22ун}] = [M_{o1} \cdot f(V = v_{21ук}) \cdot v_{21ук}] + [M_{o2} \cdot f(V = v_{22ук}) \cdot v_{22ук}] \qquad (99)$$

$$\{M_{o1} \cdot \int_0^{v_{21ун}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{v_{22ун}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} =$$

$$\{M_{o1} \cdot \int_0^{v_{21ук}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{v_{22ук}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} \qquad (100)$$

$$\{M_{o1} \cdot f[V = (v_{11ун}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} + \{M_{o2} \cdot f[V = (v_{12ун}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} =$$

$$\{M_{o1} \cdot f[V = (v_{11ук}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} + \{M_{o2} \cdot f[V = (v_{12ук}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} \qquad (101)$$

$$\{M_{o1} \cdot f[V = (v_{11ун}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{11ун}\} + \{M_{o2} \cdot f[V = (v_{12ун}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{12ун}\} =$$

$$\{M_{o1} \cdot f[V = (v_{11ук}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{11ук}\} + \{M_{o2} \cdot f[V = (v_{12ук}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{12ук}\} \qquad (102)$$

$$\{M_{o1} \cdot \int_0^{(v_{11ун}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{(v_{12ун}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} =$$

$$\{M_{o1} \cdot \int_0^{(v_{11ук}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{(v_{12ук}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} \qquad (103)$$

В эту систему уравнений нужно также добавить уравнения связи между проекциями скоростей тел 1 и 2 в подвижной $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ и неподвижной $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ системах отсчета, записанные исходя из формул (64) и (66):

$$v_{11хн} = (v_{21хн} + V) / \{1 + [(V \cdot v_{21хн}) / v_{хкр1}^2)]\} \qquad (104)$$

$$v_{12хн} = (v_{22хн} + V) / \{1 + [(V \cdot v_{22хн}) / v_{хкр1}^2)]\} \qquad (105)$$

$$v_{11хк} = (v_{21хк} + V) / \{1 + [(V \cdot v_{21хк}) / v_{хкр1}^2)]\} \qquad (106)$$

$$v_{12хк} = (v_{22хк} + V) / \{1 + [(V \cdot v_{22хк}) / v_{хкр1}^2)]\} \qquad (107)$$

$$v_{11ун} = v_{21ун} \cdot [1 - (V^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2} \qquad (108)$$

$$v_{12ун} = v_{22ун} \cdot [1 - (V^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2} \qquad (109)$$

$$v_{11ук} = v_{21ук} \cdot [1 - (V^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2} \qquad (110)$$

$$v_{12ук} = v_{22ук} \cdot [1 - (V^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2} \qquad (111)$$

Для рассмотрения имеется 17 уравнений, 12 неизвестных значения и одна неизвестная функция.

Единственной функцией способной удовлетворить всем требованиям 17 уравнений является:

$$f(V)_> = 1 / [1 - (V^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2} \qquad (112)$$

Тогда с учетом уравнений (92) -:- (94) можно записать зависимости для массы $\mathbf{M(V)_>}$, импульса $\mathbf{P(V)_>}$ и кинетической энергии $\mathbf{E_к(V)_>}$ движущегося тела со скоростью $\mathbf{V}$ в случае, когда коэффициент перехода $\boldsymbol{\beta > 1}$:

$$M(V)_> = M_о / [1 - (V^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2} \qquad (113)$$

$$P(V)_> = (M_о \cdot V) / [1 - (V^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2} \qquad (114)$$

$$E_к(V)_> = M_о \cdot v_{хкр1}^2 \cdot \boldsymbol{\{}\{1 / [1 - (V^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} - 1\boldsymbol{\}} \qquad (115)$$

9. Проверка правильности выбора формулы (112) при β>1 (для примеров № 1 и № 2)

С начала перепишем формулы (95) -:- (111) с учетом формул (113) -:- (115):

$$\{(M_{о1} \cdot v_{21хн}) / [1 - (v_{21хн}^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{о2} \cdot v_{22хн}) / [1 - (v_{22хн}^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} = \{(M_{о1} \cdot v_{21хк}) / [1 - (v_{21хк}^2/v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{о2} \cdot v_{22хк}) / [1 - (v_{22хк}^2/v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} \qquad (116)$$

$$\{M_{о1} / [1 - (v_{21хн}^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} + \{M_{о2} / [1 - (v_{22хн}^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} = \{M_{о1} / [1 - (v_{21хк}^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} + \{M_{о2} / [1 - (v_{22хк}^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} \qquad (117)$$

$$\{(M_{o1} \cdot v_{11xн}) / [1 - (v_{11xн}^2 / v_{xкр1}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{o2} \cdot v_{12xн}) / [1 - (v_{12xн}^2 / v_{xкр1}^2)]^{1/2}\} = \{(M_{o1} \cdot v_{11xк})/[1 - (v_{21xк}^2/v_{xкр1}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{o2} \cdot v_{12xк})/[1 - (v_{12xк}^2/v_{xкр1}^2)]^{1/2}\} \quad (118)$$

$$\{M_{o1} / [1 - (v_{11xн}^2 / v_{xкр1}^2)]^{1/2}\} + \{M_{o2} / [1 - (v_{12xн}^2 / v_{xкр1}^2)]^{1/2}\} = \{M_{o1} / [1 - (v_{21xк}^2 / v_{xкр1}^2)]^{1/2}\} + \{M_{o2} / [1 - (v_{12xк}^2 / v_{xкр1}^2)]^{1/2}\} \quad (119)$$

$$\{(M_{o1} \cdot v_{21yн}) / [1 - (v_{21yн}^2 / v_{xкр1}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{o2} \cdot v_{22yн}) / [1 - (v_{22yн}^2 / v_{xкр1}^2)]^{1/2}\} = \{(M_{o1} \cdot v_{21yк}) / [1 - (v_{21yк}^2/v_{xкр1}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{o2} \cdot v_{22yк}) / [1 - (v_{22yк}^2/v_{xкр1}^2)]^{1/2}\} \quad (120)$$

$$\{M_{o1} / [1 - (v_{21yн}^2 / v_{xкр1}^2)]^{1/2}\} + \{M_{o2} / [1 - (v_{22yн}^2 / v_{xкр1}^2)]^{1/2}\} = \{M_{o1} / [1 - (v_{21yк}^2 / v_{xкр1}^2)]^{1/2}\} + \{M_{o2} / [1 - (v_{22yк}^2 / v_{xкр1}^2)]^{1/2}\} \quad (121)$$

$$\mathbf{\{}(M_{o1} \cdot V)/\{1 - [(v_{11yн}^2+V^2)/v_{xкр1}^2]\}^{1/2}\mathbf{\}} + \mathbf{\{}(M_{o2} \cdot V)/\{1 - [(v_{12yн}^2+V^2)/v_{xкр1}^2]\}^{1/2}\mathbf{\}} = \mathbf{\{}(M_{o1} \cdot V)/\{1 - [(v_{11yк}^2+V^2)/v_{xкр1}^2]\}^{1/2}\mathbf{\}} + \mathbf{\{}(M_{o2} \cdot V)/\{1 - [(v_{12yк}^2+V^2)/v_{xкр1}^2]\}^{1/2}\mathbf{\}} \quad (122)$$

$$\mathbf{\{}(M_{o1} \cdot v_{11yн})/\{1-[(v_{11yн}^2+V^2)/v_{xкр1}^2]\}^{1/2}\mathbf{\}} + \mathbf{\{}(M_{o2} \cdot v_{12yн})/\{1 - [(v_{12yн}^2+V^2)/v_{xкр1}^2]\}^{1/2}\mathbf{\}} = \mathbf{\{}(M_{o1} \cdot v_{11yк})/\{1-[(v_{11yк}^2+V^2)/v_{xкр1}^2]\}^{1/2}\mathbf{\}} + \mathbf{\{}(M_{o2} \cdot v_{12yк})/\{1-[(v_{12yк}^2+V^2)/v_{xкр1}^2]\}^{1/2}\mathbf{\}} \quad (123)$$

$$\mathbf{\{}M_{o1} /\{1 - [(v_{11yн}^2 + V^2)/ v_{xкр1}^2]\}^{1/2}\mathbf{\}} + \mathbf{\{}M_{o2} /\{1 - [(v_{12yн}^2 + V^2)/ v_{xкр1}^2]\}^{1/2}\mathbf{\}} = \mathbf{\{}M_{o1} / \{1 - [(v_{11yк}^2+V^2)/ v_{xкр1}^2]\}^{1/2}\mathbf{\}} + \mathbf{\{}M_{o2} /\{1 - [(v_{12yк}^2+V^2)/ v_{xкр1}^2]\}^{1/2}\mathbf{\}} \quad (124)$$

Где:

$$v_{11xн} = (v_{21xн} + V) / \{1 + [(V \cdot v_{21xн}) / v_{xкр1}^2)]\} \quad (104)$$

$$v_{12xн} = (v_{22xн} + V) / \{1 + [(V \cdot v_{22xн}) / v_{xкр1}^2)]\} \quad (105)$$

$$v_{11xк} = (v_{21xк} + V) / \{1 + [(V \cdot v_{21xк}) / v_{xкр1}^2)]\} \quad (106)$$

$$v_{12xк} = (v_{22xк} + V) / \{1 + [(V \cdot v_{22xк}) / v_{xкр1}^2)]\} \quad (107)$$

$$v_{11yн} = v_{21yн} \cdot [1 - (V^2 / v_{xкр1}^2)]^{1/2} \quad (108)$$

$$v_{12yн} = v_{22yн} \cdot [1 - (V^2 / v_{xкр1}^2)]^{1/2} \quad (109)$$

$$v_{11yк} = v_{21yк} \cdot [1 - (V^2 / v_{xкр1}^2)]^{1/2} \quad (110)$$

$$v_{12yк} = v_{22yк} \cdot [1 - (V^2 / v_{xкр1}^2)]^{1/2} \quad (111)$$

Предположим, что $\mathbf{M_{o1}} = 1$, $\mathbf{M_{o2}} = 0,5$, $\mathbf{V} / \mathbf{v_{xкр1}} = 0,5$, $\mathbf{v_{21xн}} / \mathbf{v_{xкр1}} = \mathbf{v_{21yн}} / \mathbf{v_{xкр1}} = 0,9$, $\mathbf{v_{22xн}} / \mathbf{v_{x\,кр1}} = \mathbf{v_{22yн}} / \mathbf{v_{xкр1}} = 0,6$.

Тогда числовые расчеты дают следующие результаты для примера № 1:

I) в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

1) тело 1 имело:

а) до столкновения скорость $\mathbf{v_{21xн}} / \mathbf{v_{xкр1}} = 0,9$, массу $\mathbf{M_{21н}} = 2,294157338706$, импульс $\mathbf{P_{21н}} / \mathbf{v_{xкр1}} = 2,064741604835$, кинетическую энергию

$E_{к21н} / v_{хкр1}^2 = 1,294157338706$;

б) после столкновения $v_{21хк} / v_{хкр1} = 0,7360143377$, $M_{21к} = 1,477179174242$, $P_{21к} / v_{хкр1} = 1,087225051595$, $E_{к21к} / v_{хкр1}^2 = 0,477179174242$;

2) тело 2 имело:

а) до столкновения $v_{22хн} / v_{хкр1} = 0,6$, $M_{22н} = 0,625$, $P_{22н} / v_{хкр1} = 0,375$, $E_{к22н} / v_{хкр1}^2 = 0,125$;

б) после столкновения $v_{22хк} / v_{хкр1} = 0,937959108239$, $M_{22к} = 1,441978164463$, $P_{22к} / v_{хкр1} = 1,35251655324$, $E_{к22к} / v_{хкр1}^2 = 0,941978164463$;

3) система тел 1 и 2 имело:

а) до столкновения массу $(M_{21н} + M_{22н}) = 2,919157338706$, импульс $(P_{21н} + P_{22н}) / v_{хкр1} = 2,439741604835$, кинетическую энергию $(E_{к21н} + E_{к22н}) / v_{хкр1}^2 = 1,419157338706$;

б) после столкновения массу $(M_{21к} + M_{22к}) = 2,919157338706$, импульс $(P_{21к} + P_{22к}) / v_{хкр1} = 2,439741604835$, кинетическую энергию $(E_{к21к} + E_{к22к}) / v_{хкр1}^2 = 1,419157338706$;

II) в неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$:

1) тело 1 имело:

а) до столкновения $v_{11хн} / v_{хкр1} = 0,965517241379$, массу $M_{11н} = 3,841143835489$, импульс $P_{11н} / v_{хкр1} = 3,708690599782$, кинетическую энергию $E_{к11н} / v_{хкр1}^2 = 2,841143835489$;

б) после столкновения $v_{11хк} / v_{хкр1} = 0,903514517939$, $M_{11к} = 2,333409263988$, $P_{11к} / v_{хкр1} = 2,108269146306$, $E_{к11к} / v_{хкр1}^2 = 1,333409263988$;

2) тело 2 имело:

а) до столкновения $v_{12хн} / v_{хкр1} = 0,846153846154$, $M_{12н} = 0,938194187433$, $P_{12н} / v_{хкр1} = 0,793856620136$, $E_{к12н} / v_{хкр1}^2 = 0,438194187433$;

б) после столкновения $v_{12хк} / v_{хкр1} = 0,978882996844$, $M_{12к} = 2,445928758933$, $P_{12к} / v_{хкр1} = 2,394278073612$, $E_{к12к} / v_{хкр1}^2 = 1,945928758933$;

3) система тел 1 и 2 имело:

а) до столкновения массу $(M_{11н} + M_{12н}) = 4,779338022922$, импульс $(P_{11н} + P_{12н}) / v_{хкр1} = 4,502547219918$, кинетическую энергию

$(\mathbf{E_{к11н}} + \mathbf{E_{к12н}}) / \mathbf{v_{xкр1}}^2$= 3,279338022922 ;

б) после столкновения массу $(\mathbf{M_{11к}} + \mathbf{M_{12к}})$ = 4,779338022922 , импульс $(\mathbf{P_{11к}} + \mathbf{P_{12к}}) / \mathbf{v_{xкр1}}$ = 4,502547219918, кинетическую энергию $(\mathbf{E_{к11к}} + \mathbf{E_{к12к}}) / \mathbf{v_{xкр1}}^2$ = 3,279338022922.

Для примера № 2 числовые расчеты дают следующие результаты:

I) в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

1) тело 1 имело:

а) до столкновения скорость $\mathbf{v_{21yн}} / \mathbf{v_{xкр1}}$= 0,9 , массу $\mathbf{M_{21н}}$ = 2,294157338706, импульс $\mathbf{P_{21н}} / \mathbf{v_{xкр1}}$ = 2,064741604835, кинетическую энергию $\mathbf{E_{к21н}} / \mathbf{v_{xкр1}}^2$ = 1,294157338706;

б) после столкновения $\mathbf{v_{21yк}} / \mathbf{v_{xкр1}}$ = 0,7360143377, $\mathbf{M_{21к}}$ = 1,477179174242, $\mathbf{P_{21к}} / \mathbf{v_{xкр1}}$ = 1,087225051595, $\mathbf{E_{к21к}} / \mathbf{v_{xкр1}}^2$ = 0,477179174242;

2) тело 2 имело:

а) до столкновения $\mathbf{v_{22yн}} / \mathbf{v_{xкр1}}$ = 0,6 , $\mathbf{M_{22н}}$ = 0,625 , $\mathbf{P_{22н}} / \mathbf{v_{xкр1}}$ = 0,375, $\mathbf{E_{к22н}} / \mathbf{v_{xкр1}}^2$ = 0,125;

б) после столкновения $\mathbf{v_{22yк}} / \mathbf{v_{xкр1}}$= 0,937959108239, $\mathbf{M_{22к}}$ = 1,441978164463, $\mathbf{P_{22к}} / \mathbf{v_{xкр1}}$ = 1,35251655324, $\mathbf{E_{к22к}} / \mathbf{v_{xкр1}}^2$ = 0,941978164463;

3) система тел 1 и 2 имело:

а) до столкновения массу $(\mathbf{M_{21н}} + \mathbf{M_{22н}})$ = 2,919157338706 , импульс $(\mathbf{P_{21н}} + \mathbf{P_{22н}}) / \mathbf{v_{xкр1}}$ = 2,439741604835, кинетическую энергию $(\mathbf{E_{к21н}} + \mathbf{E_{к22н}}) / \mathbf{v_{xкр1}}^2$= 1,419157338706;

б) после столкновения массу $(\mathbf{M_{21к}} + \mathbf{M_{22к}})$ = 2,919157338706 , импульс $(\mathbf{P_{21к}} + \mathbf{P_{22к}}) / \mathbf{v_{xкр1}}$ = 2,439741604835, кинетическую энергию $(\mathbf{E_{к21к}} + \mathbf{E_{к22к}}) / \mathbf{v_{xкр1}}^2$ = 1,419157338706;

II) в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

1) тело 1 имело:

а) до столкновения $\mathbf{v_{11xн}} / \mathbf{v_{xкр1}}$ = 0,5 , $\mathbf{v_{11yн}} / \mathbf{v_{xкр1}}$= 0,779422863406 , массу $\mathbf{M_{11н}}$ = 2,64906471413 , проекции импульса $\mathbf{P_{11xн}} / \mathbf{v_{xкр1}}$ = 1,324532357065 и $\mathbf{P_{11yн}} / \mathbf{v_{xкр1}}$ = 2,064741604835, кинетическую энергию $\mathbf{E_{к11н}} / \mathbf{v_{xкр1}}^2$ = 1,64906471413;

б) после столкновения $\mathbf{v}_{11xк} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0,5$, $\mathbf{v}_{11yк} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0,637407113998$, $\mathbf{M}_{11к} = 1,70569958778$, $\mathbf{P}_{11xк} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0,85284979389$, $\mathbf{P}_{11yк} / \mathbf{v}_{xкр1} = 1,087225051595$, $\mathbf{E}_{к11к} / \mathbf{v}_{xкр1}{}^{2} = 0,70569958778$;

2) тело 2 имело:

а) до столкновения $\mathbf{v}_{12xн} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0,5$, $\mathbf{v}_{12yн} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0,519615242271$, $\mathbf{M}_{12н} = 0,721687836487$, $\mathbf{P}_{12xн} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0,360843918244$, $\mathbf{P}_{12yн} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0,375$, $\mathbf{E}_{к12н} / \mathbf{v}_{xкр1}{}^{2} = 0,221687836487$;

б) после столкновения $\mathbf{v}_{12xк} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0,5$, $\mathbf{v}_{12yк} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0,812296415446$, $\mathbf{M}_{12к} = 1,665052962837$, $\mathbf{P}_{12xк} / \mathbf{v}_{xкр1} = 0,832526481418$, $\mathbf{P}_{12yк} / \mathbf{v}_{xкр1} = 1,35251655324$, $\mathbf{E}_{к12к} / \mathbf{v}_{xкр1}{}^{2} = 1,165052962837$;

3) система тел 1 и 2 имело:

а) до столкновения массу $(\mathbf{M}_{11н} + \mathbf{M}_{12н}) = 3,370752550617$, проекции импульса $(\mathbf{P}_{11xн} + \mathbf{P}_{12xн}) / \mathbf{v}_{xкр1} = 1,685376275309$ и $(\mathbf{P}_{11yн} + \mathbf{P}_{12yн}) / \mathbf{v}_{xкр1} = 2,439741604835$, кинетическую энергию $(\mathbf{E}_{к11н} + \mathbf{E}_{к12н}) / \mathbf{v}_{xкр1}{}^{2} = 1,870752550617$;

б) после столкновения массу $(\mathbf{M}_{11к} + \mathbf{M}_{12к}) = 3,370752550617$, проекции импульса $(\mathbf{P}_{11xк} + \mathbf{P}_{12xк}) / \mathbf{v}_{xкр1} = 1,685376275309$ и $(\mathbf{P}_{11yк} + \mathbf{P}_{12yк}) / \mathbf{v}_{xкр1} = 2,439741604835$, кинетическую энергию $(\mathbf{E}_{к11к} + \mathbf{E}_{к12к}) / \mathbf{v}_{xкр1}{}^{2} = 1,870752550617$.

По результатам расчета можно сделать следующий вывод: в примерах № 1 и № 2 в системах отсчета подвижной $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ и неподвижной $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ до и после столкновения масса, импульс и кинетическая энергия механической системы тел 1 и 2 остаются неизменными.

Следовательно формулы (113)-:-(115), написанные для случая когда коэффициент перехода $\boldsymbol{\beta} > \mathbf{1}$, удовлетворяют требованиям системы уравнений (95)-:-(103).

10. Формула массы движущегося тела при $0 < \beta < 1$

С целью определения зависимости для массы движущегося тела при значении коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_{<}$ (т.е. при $\mathbf{0} < \boldsymbol{\beta} < \mathbf{1}$) составим следующую систему уравнений:

$$[M_{o1} \cdot f\,(V = v_{21xн}) \cdot v_{21xн}] + [M_{o2} \cdot f\,(V = v_{22xн}) \cdot v_{22xн}] = [M_{o1} \cdot f\,(V = v_{21xк}) \cdot v_{21xк}] + [M_{o2} \cdot f\,(V = v_{22xк}) \cdot v_{22xк}] \qquad (95)$$

$$\{M_{o1} \cdot \int_0^{v_{21xн}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{v_{22xн}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} =$$

$$\{M_{o1} \cdot \int_0^{v_{21xк}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{v_{22xк}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} \qquad (96)$$

$$[M_{o1} \cdot f\,(V = v_{11xн}) \cdot v_{11xн}] + [M_{o2} \cdot f\,(V = v_{12xн}) \cdot v_{12xн}] = [M_{o1} \cdot f\,(V = v_{11xк}) \cdot v_{11xк}] + [M_{o2} \cdot f\,(V = v_{12xк}) \cdot v_{12xк}] \qquad (97)$$

$$\{M_{o1} \cdot \int_0^{v_{11xн}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{v_{12xн}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} =$$

$$\{M_{o1} \cdot \int_0^{v_{11xк}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{v_{12xк}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} \qquad (98)$$

$$[M_{o1} \cdot f\,(V = v_{21yн}) \cdot v_{21yн}] + [M_{o2} \cdot f\,(V = v_{22yн}) \cdot v_{22yн}] = [M_{o1} \cdot f\,(V = v_{21yк}) \cdot v_{21yк}] + [M_{o2} \cdot f\,(V = v_{22yк}) \cdot v_{22yк}] \qquad (99)$$

$$\{M_{o1} \cdot \int_0^{v_{21yн}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{v_{22yн}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} =$$

$$\{M_{o1} \cdot \int_0^{v_{21yк}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{v_{22yк}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} \qquad (100)$$

$$\{M_{o1} \cdot f\,[V = (v_{11yн}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} + \{M_{o2} \cdot f\,[V = (v_{12yн}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} =$$
$$\{M_{o1} \cdot f\,[V = (v_{11yк}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} + \{M_{o2} \cdot f\,[V = (v_{12yк}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} \qquad (101)$$

$$\{M_{o1} \cdot f\,[V = (v_{11yн}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{11yн}\} + \{M_{o2} \cdot f\,[V = (v_{12yн}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{12yн}\} =$$
$$\{M_{o1} \cdot f\,[V = (v_{11yк}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{11yк}\} + \{M_{o2} \cdot f\,[V = (v_{12yк}{}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{12yк}\} \qquad (102)$$

$$\{M_{o1} \cdot \int_0^{(v_{11yн}{}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{(v_{12yн}{}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} =$$

$$\{M_{o1} \cdot \int_0^{(v_{11yк}{}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{(v_{12yк}{}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f\,(V) \cdot V] + [f'\,(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} \qquad (103)$$

В эту систему уравнений нужно также добавить уравнения связи между скоростями в подвижной $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ и неподвижной $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ системах отсчета, записанные исходя из формул (80) и (82):

$$v_{11xн} = (v_{21xн} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{21xн}) / v_{xкр2}^2)]\} \qquad (125)$$

$$v_{12xн} = (v_{22xн} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{22xн}) / v_{xкр2}^2)]\} \qquad (126)$$

$$v_{11xк} = (v_{21xк} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{21xк}) / v_{xкр2}^2)]\} \qquad (127)$$

$$v_{12xк} = (v_{22xк} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{22xк}) / v_{xкр2}^2)]\} \qquad (128)$$

$$v_{11yн} = v_{21yн} \cdot [1 + (V^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2} \qquad (129)$$

$$v_{12yн} = v_{22yн} \cdot [1 + (V^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2} \qquad (130)$$

$$v_{11yк} = v_{21yк} \cdot [1 + (V^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2} \qquad (131)$$

$$v_{12yк} = v_{22yк} \cdot [1 + (V^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2} \qquad (132)$$

Для рассмотрения имеется 17 уравнений, 12 неизвестных значения и одна неизвестная функция.

Единственной функцией способной удовлетворить всем требованиям 17 уравнений является:

$$f(V)_< = 1 / [1 + (V^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2} \qquad (133)$$

Тогда с учетом уравнений (92)-:-(94) можно записать зависимости для массы $\mathbf{M(V)_<}$, импульса $\mathbf{P(V)_<}$ и кинетической энергии $\mathbf{E_к(V)_<}$ движущегося тела со скоростью **V** в случае, когда коэффициент перехода $\mathbf{0 < \beta < 1}$:

$$M(V)_< = M_o / [1 + (V^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2} \qquad (134)$$

$$P(V)_< = (M_o \cdot V) / [1 + (V^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2} \qquad (135)$$

$$E_к(V)_< = M_o \cdot v_{xкр2}^2 \cdot \boldsymbol{\{} 1 - \{1 / [1 + (V^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\}\boldsymbol{\}} \qquad (136)$$

11. Проверка правильности выбора формулы (133) при 0 < β < 1 (для примеров № 1 и № 2)

С начала перепишем формулы (95)-:-(103) с учетом формул (134)-:-(136):

$$\{(M_{o1} \cdot v_{21xн}) / [1 + (v_{21xн}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{o2} \cdot v_{22xн}) / [1 + (v_{22xн}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} = \{(M_{o1} \cdot v_{21xк})/[1 + (v_{21xк}^2/v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{o2} \cdot v_{22xк})/[1 + (v_{22xк}^2/v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} \qquad (137)$$

$$\{M_{o1} / [1 + (v_{21xн}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} + \{M_{o2} / [1 + (v_{22xн}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} = \{M_{o1} / [1 + (v_{21xк}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} + \{M_{o2} / [1 + (v_{22xк}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} \qquad (138)$$

$$\{(M_{o1} \cdot v_{11xн}) / [1 + (v_{11xн}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{o2} \cdot v_{12xн}) / [1 + (v_{12xн}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} = \{(M_{o1} \cdot v_{11xк})/[1 + (v_{21xк}^2/v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{o2} \cdot v_{12xк})/[1 + (v_{12xк}^2/v_{xкр2}^2)]^{1/2}\} \qquad (139)$$

$$\{M_{o1} / [1 + (v_{11хн}^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2}\} + \{M_{o2} / [1 + (v_{12хн}^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2}\} = \{M_{o1} / [1 + (v_{21хк}^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2}\} + \{M_{o2} / [1 + (v_{12хк}^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2}\} \qquad (140)$$

$$\{(M_{o1} \cdot v_{21ун}) / [1 + (v_{21ун}^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{o2} \cdot v_{22ун}) / [1 + (v_{22ун}^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2}\} = \{(M_{o1} \cdot v_{21ук}) / [1 + (v_{21ук}^2/v_{хкр2}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{o2} \cdot v_{22ук}) / [1 + (v_{22ук}^2/v_{хкр2}^2)]^{1/2}\} \qquad (141)$$

$$\{M_{o1} / [1 + (v_{21ун}^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2}\} + \{M_{o2} / [1 + (v_{22ун}^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2}\} = \{M_{o1} / [1 + (v_{21ук}^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2}\} + \{M_{o2} / [1 + (v_{22ук}^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2}\} \qquad (142)$$

$$\boldsymbol{\{}(M_{o1} \cdot V)/\{1 + [(v_{11ун}^2+V^2)/v_{хкр2}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}(M_{o2} \cdot V)/\{1 + [(v_{12ун}^2+V^2)/v_{хкр2}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} = \boldsymbol{\{}(M_{o1}\cdot V)/\{1 + [(v_{11ук}^2+V^2)/v_{хкр2}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}(M_{o2}\cdot V)/\{1 + [(v_{12ук}^2+V^2)/v_{хкр2}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} \qquad (143)$$

$$\boldsymbol{\{}(M_{o1}\cdot v_{11ун})/\{1+[(v_{11ун}^2+V^2)/v_{хкр2}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}(M_{o2}\cdot v_{12ун})/\{1+ [(v_{12ун}^2+V^2)/v_{хкр2}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} = \boldsymbol{\{}(M_{o1}\cdot v_{11ук})/\{1+[(v_{11ук}^2+V^2)/v_{хкр2}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}(M_{o2}\cdot v_{12ук})/\{1+[(v_{12ук}^2+V^2)/v_{хкр2}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} \qquad (144)$$

$$\boldsymbol{\{}M_{o1} /\{1 + [(v_{11ун}^2 + V^2)/ v_{хкр2}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}M_{o2} /\{1 + [(v_{12ун}^2+ V^2)/ v_{хкр2}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} = \boldsymbol{\{}M_{o1} / \{1 + [(v_{11ук}^2+V^2)/ v_{хкр2}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}M_{o2} /\{1 + [(v_{12ук}^2+V^2)/ v_{хкр2}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} \qquad (145)$$

Где:

$$v_{11хн} = (v_{21хн} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{21хн}) / v_{хкр2}^2)]\} \qquad (125)$$

$$v_{12хн} = (v_{22хн} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{22хн}) / v_{хкр2}^2)]\} \qquad (126)$$

$$v_{11хк} = (v_{21хк} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{21хк}) / v_{хкр2}^2)]\} \qquad (127)$$

$$v_{12хк} = (v_{22хк} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{22хк}) / v_{хкр2}^2)]\} \qquad (128)$$

$$v_{11ун} = v_{21ун} \cdot [1 + (V^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2} \qquad (129)$$

$$v_{12ун} = v_{22ун} \cdot [1 + (V^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2} \qquad (130)$$

$$v_{11ук} = v_{21ук} \cdot [1 + (V^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2} \qquad (131)$$

$$v_{12ук} = v_{22ук} \cdot [1 + (V^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2} \qquad (132)$$

Предположим, что $\mathbf{M_{o1}} = 1$, $\mathbf{M_{o2}} = 0{,}5$, $\mathbf{V} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0{,}5$, $\mathbf{v_{21хн}} / \mathbf{v_{хкр2}} = \mathbf{v_{21ун}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0{,}9$, $\mathbf{v_{22хн}} / \mathbf{v_{хкр2}} = \mathbf{v_{22ун}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0{,}6$.

Тогда числовые расчеты дают следующие результаты для примера № 1:

I) в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

1) тело 1 имело:

а) до столкновения скорость $\mathbf{v_{21хн}} / \mathbf{v_{хкр2}}= 0{,}9$, массу $\mathbf{M_{21н}} = 0{,}743294146247$, импульс $\mathbf{P_{21н}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0{,}668964731622$, кинетическую энергию $\mathbf{E_{к21н}} / \mathbf{v_{хкр2}^2} = 0{,}256705853753$;

б) после столкновения $\mathbf{v_{21хк}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0{,}691099932748$, $\mathbf{M_{21к}} = 0{,}822656908881$,

$\mathbf{P_{21к}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0{,}568538134403$, $\mathbf{E_{к21к}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2 = 0{,}177343091119$;

2) тело 2 имело:

а) до столкновения $\mathbf{v_{22хн}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0{,}6$, $\mathbf{M_{22н}} = 0{,}428746462856$, $\mathbf{P_{22н}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0{,}257247877714$, $\mathbf{E_{к22н}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2 = 0{,}071253537144$;

б) после столкновения $\mathbf{v_{22хк}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 1{,}023729712365$, $\mathbf{M_{22к}} = 0{,}349383700222$, $\mathbf{P_{22к}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0{,}357674474934$, $\mathbf{E_{к22к}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2 = 0{,}150616299778$;

3) система тел 1 и 2 имело:

а) до столкновения массу $(\mathbf{M_{21н}} + \mathbf{M_{22н}}) = 1{,}172040609103$, импульс $(\mathbf{P_{21н}} + \mathbf{P_{22н}}) / \mathbf{v_{хкр2}} = 0{,}926212609336$, кинетическую энергию $(\mathbf{E_{к21н}} + \mathbf{E_{к22н}}) / \mathbf{v_{хкр2}}^2 = 0{,}327959390897$;

б) после столкновения массу $(\mathbf{M_{21к}} + \mathbf{M_{22к}}) = 1{,}172040609103$, импульс $(\mathbf{P_{21к}} + \mathbf{P_{22к}}) / \mathbf{v_{хкр2}} = 0{,}926212609336$, кинетическую энергию $(\mathbf{E_{к21к}} + \mathbf{E_{к22к}}) / \mathbf{v_{хкр2}}^2 = 0{,}327959390897$;

II) в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

1) тело 1 имело:

а) до столкновения $\mathbf{v_{11хн}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 2{,}545454545455$, массу $\mathbf{M_{11н}} = 0{,}365652372423$, импульс $\mathbf{P_{11н}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0{,}93075149344$, кинетическую энергию $\mathbf{E_{к11н}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2 = 0{,}634347627577$;

б) после столкновения $\mathbf{v_{11хк}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 1{,}820001331727$, $\mathbf{M_{11к}} = 0{,}481548724902$, $\mathbf{P_{11к}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0{,}876419320614$, $\mathbf{E_{к11к}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2 = 0{,}518451275098$;

2) тело 2 имело:

а) до столкновения $\mathbf{v_{12хн}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 1{,}571428571429$, $\mathbf{M_{12н}} = 0{,}268437746097$, $\mathbf{P_{12н}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0{,}421830743866$, $\mathbf{E_{к12н}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2 = 0{,}231562253903$;

б) после столкновения $\mathbf{v_{12хк}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 3{,}121532492927$, $\mathbf{M_{12к}} = 0{,}152541393617$, $\mathbf{P_{12к}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0{,}476162916693$, $\mathbf{E_{к12к}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2 = 0{,}347458606383$;

3) система тел 1 и 2 имело:

а) до столкновения массу $(\mathbf{M_{11н}} + \mathbf{M_{12н}}) = 0{,}63409011852$, импульс $(\mathbf{P_{11н}} + \mathbf{P_{12н}}) / \mathbf{v_{хкр2}} = 1{,}352582237306$, кинетическую энергию $(\mathbf{E_{к11н}} + \mathbf{E_{к12н}}) / \mathbf{v_{хкр2}}^2 = 0{,}86590988148$;

б) после столкновения массу $(\mathbf{M_{11к}} + \mathbf{M_{12к}}) = 0{,}63409011852$, импульс

$(\mathbf{P}_{11к} + \mathbf{P}_{12к}) / \mathbf{v}_{xкр2} = 1{,}352582237306$, кинетическую энергию $(\mathbf{E}_{к11к} + \mathbf{E}_{к12к}) / \mathbf{v}_{xкр2}^{2} = 0{,}86590988148$.

Для примера № 2 числовые расчеты дают следующие результаты:

I) в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

1) тело 1 имело:

а) до столкновения скорость $\mathbf{v}_{21yн} / \mathbf{v}_{xкр2} = 0{,}9$, массу $\mathbf{M}_{21н} = 0{,}743294146247$, импульс $\mathbf{P}_{21н} / \mathbf{v}_{xкр2} = 0{,}668964731622$, кинетическую энергию $\mathbf{E}_{к21н} / \mathbf{v}_{xкр2}^{2} = 0{,}256705853753$;

б) после столкновения $\mathbf{v}_{21yк} / \mathbf{v}_{xкр2} = 0{,}691099932748$, $\mathbf{M}_{21к} = 0{,}822656908881$, $\mathbf{P}_{21к} / \mathbf{v}_{xкр2} = 0{,}568538134403$, $\mathbf{E}_{к21к} / \mathbf{v}_{xкр2}^{2} = 0{,}177343091119$;

2) тело 2 имело:

а) до столкновения $\mathbf{v}_{22yн} / \mathbf{v}_{xкр2} = 0{,}6$, $\mathbf{M}_{22н} = 0{,}428746462856$, $\mathbf{P}_{22н} / \mathbf{v}_{xкр2} = 0{,}257247877714$, $\mathbf{E}_{к22н} / \mathbf{v}_{xкр2}^{2} = 0{,}071253537144$;

б) после столкновения $\mathbf{v}_{22yк} / \mathbf{v}_{xкр2} = 1{,}023729712365$, $\mathbf{M}_{22к} = 0{,}349383700222$, $\mathbf{P}_{22к} / \mathbf{v}_{xкр2} = 0{,}357674474934$, $\mathbf{E}_{к22к} / \mathbf{v}_{xкр2}^{2} = 0{,}150616299778$;

3) система тел 1 и 2 имело:

а) до столкновения массу $(\mathbf{M}_{21н} + \mathbf{M}_{22н}) = 1{,}172040609103$, импульс $(\mathbf{P}_{21н} + \mathbf{P}_{22н}) / \mathbf{v}_{xкр2} = 0{,}926212609336$, кинетическую энергию $(\mathbf{E}_{к21н} + \mathbf{E}_{к22н}) / \mathbf{v}_{xкр2}^{2} = 0{,}327959390897$;

б) после столкновения массу $(\mathbf{M}_{21к} + \mathbf{M}_{22к}) = 1{,}172040609103$, импульс $(\mathbf{P}_{21к} + \mathbf{P}_{22к}) / \mathbf{v}_{xкр2} = 0{,}926212609336$, кинетическую энергию $(\mathbf{E}_{к21к} + \mathbf{E}_{к22к}) / \mathbf{v}_{xкр2}^{2} = 0{,}327959390897$;

II) в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

1) тело 1 имело:

а) до столкновения $\mathbf{v}_{11xн} / \mathbf{v}_{xкр2} = 0{,}5$, $\mathbf{v}_{11yн} / \mathbf{v}_{xкр2} = 1{,}006230589875$, массу $\mathbf{M}_{11н} = 0{,}664822495315$, проекции импульса $\mathbf{P}_{11xн} / \mathbf{v}_{xкр2} = 0{,}332411247657$ и $\mathbf{P}_{11yн} / \mathbf{v}_{xкр2} = 0{,}668964731622$, кинетическую энергию $\mathbf{E}_{к11н} / \mathbf{v}_{xкр2}^{2} = 0{,}335177504685$;

б) после столкновения $\mathbf{v}_{11xк} / \mathbf{v}_{x\ кр2} = 0{,}5$, $\mathbf{v}_{11yк} / \mathbf{v}_{x\ кр2} = 0{,}772673214435$, $\mathbf{M}_{11к} = 0{,}735806708167$, $\mathbf{P}_{11xк} / \mathbf{v}_{xкр2} = 0{,}367903354084$,

$\mathbf{P_{11ук}} / \mathbf{v_{xкр2}} = 0{,}568538134403$, $\mathbf{E_{к11к}} / \mathbf{v_{xкр2}}^2 = 0{,}264193291833$;

2) тело 2 имело:

а) до столкновения $\mathbf{v_{12xн}} / \mathbf{v_{xкр2}} = 0{,}5$, $\mathbf{v_{12yн}} / \mathbf{v_{xкр2}} = 0{,}67082039325$, $\mathbf{M_{12н}} = 0{,}383482494424$, $\mathbf{P_{12xн}} / \mathbf{v_{xкр2}} = 0{,}191741247212$, $\mathbf{P_{12yн}} / \mathbf{v_{xкр2}} = 0{,}257247877714$, $\mathbf{E_{к12н}} / \mathbf{v_{xкр2}}^2 = 0{,}116517505576$;

б) после столкновения $\mathbf{v_{12xк}} / \mathbf{v_{xкр2}} = 0{,}5$, $\mathbf{v_{12yк}} / \mathbf{v_{xкр2}} = 1{,}144564613718$, $\mathbf{M_{12к}} = 0{,}312498281571$, $\mathbf{P_{12xк}} / \mathbf{v_{xкр2}} = 0{,}156249140785$, $\mathbf{P_{12yк}} / \mathbf{v_{xкр2}} = 0{,}357674474934$, $\mathbf{E_{к12к}} / \mathbf{v_{xкр2}}^2 = 0{,}187501718429$;

3) система тел 1 и 2 имело:

а) до столкновения массу $(\mathbf{M_{11н}} + \mathbf{M_{12н}}) = 1{,}048304989738$, проекции импульса $(\mathbf{P_{11xн}} + \mathbf{P_{12xн}}) / \mathbf{v_{xкр2}} = 0{,}524152494869$ и $(\mathbf{P_{11yн}} + \mathbf{P_{12yн}}) / \mathbf{v_{xкр2}} = 0{,}926212609336$, кинетическую энергию $(\mathbf{E_{к11н}} + \mathbf{E_{к12н}}) / \mathbf{v_{xкр2}}^2 = 0{,}451695010262$;

б) после столкновения массу $(\mathbf{M_{11к}} + \mathbf{M_{12к}}) = 1{,}048304989738$, проекции импульса $(\mathbf{P_{11xк}} + \mathbf{P_{12xк}}) / \mathbf{v_{xкр2}} = 0{,}524152494869$ и $(\mathbf{P_{11yк}} + \mathbf{P_{12yк}}) / \mathbf{v_{xкр2}} = 0{,}926212609336$, кинетическую энергию $(\mathbf{E_{к11к}} + \mathbf{E_{к12к}}) / \mathbf{v_{xкр2}}^2 = 0{,}451695010262$.

По результатам расчета можно сделать следующий вывод, в примерах № 1 и № 2 в системах отсчета подвижной $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ и неподвижной $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ до и после столкновения масса, импульс и кинетическая энергия механической системы тел 1 и 2 остаются неизменными.

Следовательно формулы (134)-:-(136), написанные для случая, когда коэффициент перехода $\mathbf{0 < \beta < 1}$, удовлетворяют требованиям системы уравнений (95)-:-(103).

12. Сравнение формул (113)-:-(115) с формулами (134)-:-(136)

О зависимостях (113)-:-(115):

$$M(V)_{>} = M_o / [1 - (V^2 / v_{xкр1}^2)]^{1/2} \qquad (113)$$

$$P(V)_{>} = (M_o \cdot V) / [1 - (V^2 / v_{xкр1}^2)]^{1/2} \qquad (114)$$

$$E_к(V)_{>} = M_o \cdot v_{xкр1}^2 \cdot \{\{1 / [1 - (V^2 / v_{xкр1}^2)]^{1/2}\} - 1\} \qquad (115)$$

для массы $\mathbf{M(V)_>}$, импульса $\mathbf{P(V)_>}$ и кинетической энергии $\mathbf{E_к(V)_>}$ движущегося тела со скоростью **V**, в случае когда коэффициент перехода **β > 1**, можно сказать следующее:

- при значениях скорости **V** несоизмеримо малых со скоростью $\mathbf{v_{хкр1}}$: $M(V)_> = M_o$, $P(V)_> = M_o \cdot V$, $E_к(V)_> = (M_o \cdot V^2)/2$;

- при $\mathbf{V = v_{хкр1}}$: $M(V)_> = \infty$, $P(V)_> = \infty$, $E_к(V)_> = \infty$;

- при $\mathbf{V < v_{хкр1}}$: $M(V)_>$, $P(V)_>$ и $E_к(V)_>$ - имеют действительные значения;

- при $\mathbf{V > v_{хкр1}}$: $M(V)_>$, $P(V)_>$ и $E_к(V)_>$ - действительных значений не имеют.

Аналогично о зависимостях (134)-:-(136):

$$M(V)_< = M_o / [1 + (V^2 / v_{хкр2}{}^2)]^{1/2} \qquad (134)$$

$$P(V)_< = (M_o \cdot V) / [1 + (V^2 / v_{хкр2}{}^2)]^{1/2} \qquad (135)$$

$$E_к(V)_< = M_o \cdot v_{хкр2}{}^2 \cdot \{ 1 - \{1 / [1 + (V^2 / v_{хкр2}{}^2)]^{1/2}\}\} \qquad (136)$$

для массы $\mathbf{M(V)_<}$, импульса $\mathbf{P(V)_<}$ и кинетической энергии $\mathbf{E_к(V)_<}$ движущегося тела со скоростью **V**, в случае когда коэффициент перехода **0 < β < 1 ,** можно сказать следующее:

- при значениях скорости **V** несоизмеримо малых со скоростью $\mathbf{v_{хкр2}}$: $M(V)_< = M_o$, $P(V)_< = M_o \cdot V$, $E_к(V)_< = (M_o \cdot V^2)/2$;

- при $\mathbf{V = v_{хкр2}}$: $M(V)_< = M_o \cdot (2)^{-1/2}$, $P(V)_< = M_o \cdot v_{хкр2} \cdot (2)^{-1/2}$ и $E_к(V)_< = M_o \cdot v_{хкр2}{}^2 \cdot [1 - (2)^{-1/2}]$;

- при $\mathbf{V = \infty}$: $M(V)_<$ стремится к нулю, $P(V)_< = M_o \cdot v_{хкр2}$, $E_к(V)_< = M_o \cdot v_{хкр2}{}^2$.

Используя формулы (113), (114), (64), (65), (70), (71) и (134), (135), (80), (81), (86), (87), также можно отметить, что как для коэффициента перехода **β > 1**, так и для **0 < β < 1** : сила $\mathbf{F_x}$, в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ приложенная к материальной точке, которая движется параллельно оси $\mathbf{O_2x_2}$ или находится в состоянии покоя, и линия действия которой параллельна оси $\mathbf{O_2x_2}$, будет инвариантна для любой инерциальной системы отсчета, движущейся относительно системы $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ вдоль оси

$\mathbf{O_2x_2}$.

13. Проверка на примере № 3 формул (112) при β > 1 и (133) при 0 < β < 1

Проведенные проверки формул (112) и (133) на простейших примерах № 1 и № 2 еще не дают гарантию, что при использовании формул (113)-:-(115) и (134)-:-(136) для других замкнутых механических систем тел в инерциальных системах отсчета будет выполняться закон сохранения импульса.

Пример № 3

Допустим, что имеются две инерциальные системы отсчета, аналогичные системам отсчета, изображенным на рис.1, неподвижная $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижная $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, которая бы двигалась со скоростью $\mathbf{V}$ параллельно оси $\mathbf{O_1x_1}$ относительно системы $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$.

Предположим, что имеется замкнутая механическая система тел, показанная на рис.5 и состоящая из точечных тела 1 и тела 2, имеющих равные массы $\mathbf{M_o}$ в состоянии покоя.

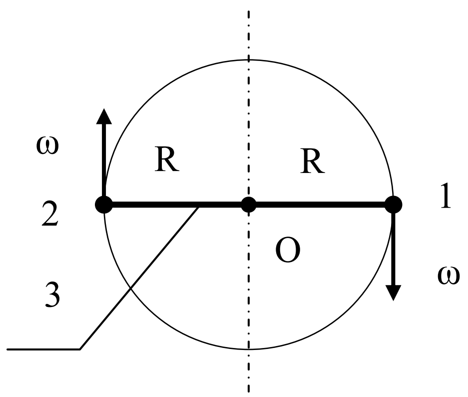

Рис. 5

Тела 1 и 2 соединены абсолютно жесткой (недеформируемой) нитью 3, не имеющей массы.

Тела 1 и 2 вращаются с угловой скоростью **ω** вокруг общего центра масс точки **O**. Расстояние от точечного тела 1 (тела 2) до точки **O** равно **R**.

Поместим рассматриваемую замкнутую систему тел 1 и 2 в подвижную систему отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ таким образом, чтобы точка **O** была бы неподвижна в этой системе и совпадала с началом координат $\mathbf{O_2}$, а вращение тел 1 и 2 вокруг нее происходило бы по часовой стрелке в плоскости $\mathbf{O_2x_2y_2}$, как показано на рис. 6.

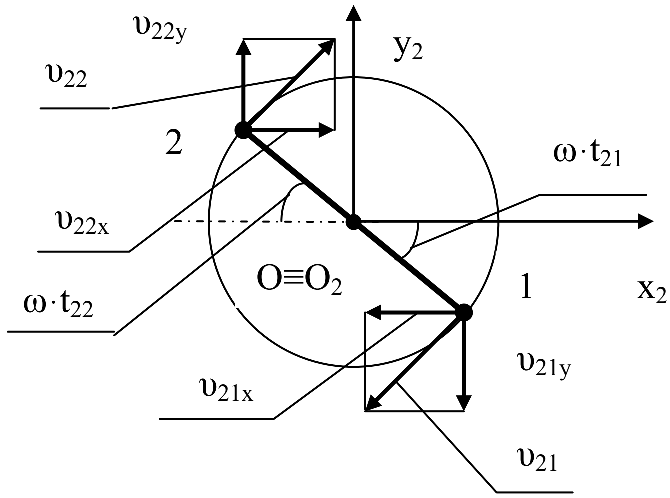

Рис. 6

Также допустим, что в момент начала отсчета времени ($\mathbf{t_2}$=0) в системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ тела 1 и 2 находились на оси $\mathbf{O_2x_2}$, причем тело 1 имело положительную координату, а тело 2 – отрицательную.

Опираясь на выше сказанное можно отметить, что в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ в любой момент времени $\mathbf{t_2}$ тела 1 и 2 будут иметь скорости $\boldsymbol{\upsilon_{21}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22}}$ соответственно равные:

$$\upsilon_{21} = \upsilon_{22} = \upsilon = \omega \cdot R \qquad (146)$$

При этом проекции $\boldsymbol{\upsilon_{21x}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{21y}}$ скорости тела 1 и проекции $\boldsymbol{\upsilon_{22x}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22y}}$ скорости тела 2 на оси $\mathbf{O_2x_2}$ и $\mathbf{O_2y_2}$ соответственно для моментов времени $\mathbf{t_{21}}$ и $\mathbf{t_{22}}$ будут равны:

$$\upsilon_{21x} = -[\upsilon \cdot \mathrm{Sin}\,(\omega \cdot t_{21})] \qquad (147)$$

$$\upsilon_{21y} = -[\upsilon \cdot \mathrm{Cos}\,(\omega \cdot t_{21})] \qquad (148)$$

$$\upsilon_{22x} = \upsilon \cdot \mathrm{Sin}\,(\omega \cdot t_{22}) \qquad (149)$$

$$\upsilon_{22y} = \upsilon \cdot \mathrm{Cos}\,(\omega \cdot t_{22}) \qquad (150)$$

Связь между координатами $\mathbf{x_{21}}$ и $\mathbf{y_{21}}$ тела 1 в зависимости от времени $\mathbf{t_{21}}$ и связь между координатами $\mathbf{x_{22}}$ и $\mathbf{y_{22}}$ тела 2 в зависимости от времени $\mathbf{t_{22}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ можно записать в виде:

$$x_{21} = R \cdot \mathrm{Cos}\,(\omega \cdot t_{21}) \qquad (151)$$

$$y_{21} = -[R \cdot \mathrm{Sin}\,(\omega \cdot t_{21})] \qquad (152)$$

$$x_{22} = -[R \cdot \mathrm{Cos}\,(\omega \cdot t_{22})] \qquad (153)$$

$$y_{22} = R \cdot \mathrm{Sin}\,(\omega \cdot t_{21}) \qquad (154)$$

Опираясь на уравнения (11) и (13) можно написать связь между координатами $\mathbf{x_{11}}$ и $\mathbf{y_{11}}$ тела 1 в момент времени $\mathbf{t_{11}}$ в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и координатами $\mathbf{x_{21}}$ и $\mathbf{y_{21}}$ тела 1 в момент времени $\mathbf{t_{21}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

$$x_{11} = \beta \cdot [\,x_{21} + (V \cdot t_{21})] \qquad (155)$$

$$y_{11} = y_{21} \qquad (156)$$

Аналогично используя уравнения (11) и (13) можно написать связь между координатами $\mathbf{x_{12}}$ и $\mathbf{y_{12}}$ тела 2 в момент времени $\mathbf{t_{12}}$ в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и координатами $\mathbf{x_{22}}$ и $\mathbf{y_{22}}$ тела 2 в момент времени $\mathbf{t_{22}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

$$x_{12} = \beta \cdot [\,x_{22} + (V \cdot t_{22})] \qquad (157)$$

$$y_{12} = y_{22} \qquad (158)$$

С помощью формулы (15) можно записать связь между значениями времен $\mathbf{t_{11}}$, $\mathbf{t_{21}}$ и $\mathbf{t_{12}}$, $\mathbf{t_{22}}$:

$$t_{11} = \{[(\beta^2 - 1) \cdot x_{21}] / (\beta \cdot V)\} + (\beta \cdot t_{21}) \qquad (159)$$

$$t_{12} = \{[(\beta^2 - 1) \cdot x_{22}] / (\beta \cdot V)\} + (\beta \cdot t_{22}) \qquad (160)$$

В рассматриваемом примере нас будет интересовать положение тел 1 и 2 в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ в один и тот же момент времени, т.е. когда:

$$t_{11} = t_{12} \qquad (161)$$

Тогда уравнение (161) с учетом формул (151), (153), (155), (157), (159) и (160) примет вид:

$\{[(\beta^2-1)\cdot R\cdot Cos(\omega\cdot t_{21})]/(\beta\cdot V)\}+(\beta\cdot t_{21})=\{[(1-\beta^2)\cdot R\cdot Cos(\omega\cdot t_{22})]/(\beta\cdot V)\}+(\beta\cdot t_{22})$ (162)

В подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ при выполнении условия (161) представляет интерес положение тел 1 и 2, когда:

$t_{21} = t_{22} = t_{2p}$ (163)

Подставив условие (163) в уравнение (162) и для случая, когда $(\omega \cdot t_{2p}) < \pi$, получим:

$(\omega \cdot t_{2p}) = \pi / 2$ (164)

Также в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ при выполнении условия (161) представляет интерес положение тел 1 и 2, когда:

$t_{21} = 0$ (165)

Значение времени $\mathbf{t_{22}}$ при выполнении условий (161) и (165) обозначим $\mathbf{t_{22т}}$, для которого уравнение (162) примет вид:

$t_{22т} = [1 - (1/ \beta^2)] \cdot [1 + Cos (\omega \cdot t_{22т})] \cdot (R / V)$ (166)

или:

$\omega \cdot t_{22т} = [1 - (1/ \beta^2)] \cdot [1 + Cos (\omega \cdot t_{22т})] \cdot (\upsilon / V)$ (167)

Как видно из уравнения (167) значение времени $\mathbf{t_{22т}}$ в зависимости от значения коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ может быть:

- $\mathbf{t_{22т}} > 0$ при $\boldsymbol{\beta > 1}$;
- $\mathbf{t_{22т}} < 0$ при $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$;
- $\mathbf{t_{22т}} = 0$ при $\boldsymbol{\beta = 1}$.

Теперь можем перейти к проверке выполнения закона сохранения импульса.

Рассмотрим два момента времени в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$.

а) момент времени $\mathbf{t_{1p}}$

Моменту времени $\mathbf{t_{1p}}$ в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$, которому в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ для тел 1 и 2 будет соответствовать момент времени $\mathbf{t_{2p}}$.

Как показано на рис. 7 в соответствии с уравнением (164), (147)-:-(150)

в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ в момент времени $\mathbf{t_{2p}}$ тело 1 и тело 2 соответственно имеют следующие значения проекций $\boldsymbol{\upsilon_{21xp}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{21yp}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22xp}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{22yp}}$ скоростей своего движения на оси $\mathbf{O_2x_2}$ и $\mathbf{O_2y_2}$:

$$\upsilon_{21xp} = -\,\upsilon \qquad (168)$$

$$\upsilon_{21yp} = 0 \qquad (169)$$

$$\upsilon_{22xp} = \upsilon \qquad (170)$$

$$\upsilon_{22yp} = 0 \qquad (171)$$

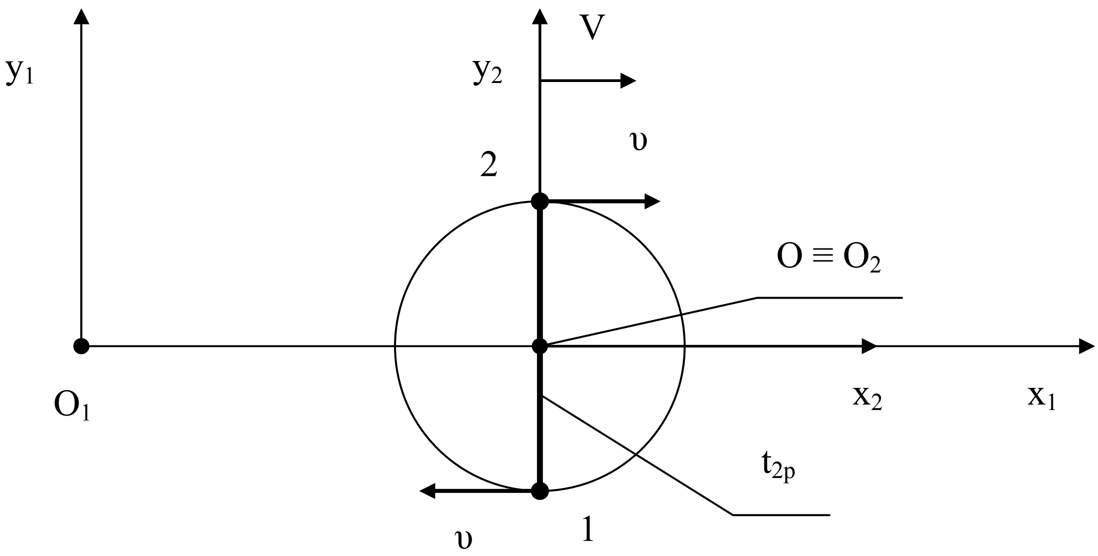

Рис. 7

Тогда исходя из формул (17), (19) и (168)-:-(171), в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ в момент времени $\mathbf{t_{1p}}$ тело 1 и тело 2 соответственно будут иметь следующие значения проекций $\boldsymbol{\upsilon_{11xp}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{11yp}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{12xp}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{12yp}}$ скоростей своего движения на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$:

$$\upsilon_{11xp} = (V - \upsilon) / \boldsymbol{\{}1 - \{[(\beta^2 - 1) \cdot \upsilon] / (\beta^2 \cdot V)\}\boldsymbol{\}} \qquad (172)$$

$$\upsilon_{11yp} = 0 \qquad (173)$$

$$\upsilon_{12xp} = (V + \upsilon) / \boldsymbol{\{}\{[(\beta^2 - 1) \cdot \upsilon] / (\beta^2 \cdot V)\} + 1\boldsymbol{\}} \qquad (174)$$

$$\upsilon_{12yp} = 0 \qquad (175)$$

б) момент времени $\mathbf{t_{1т}}$

Моменту времени $\mathbf{t_{1т}}$ в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ будет соответствовать момент времени $\mathbf{t_{21} = 0}$ для тела 1 и момент времени $\mathbf{t_{22т}}$ для тела 2 в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$.

Как показано на рис. 8 в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ в момент времени $\mathbf{t_{21} = 0}$ тело 1 и в момент времени $\mathbf{t_{22т}}$ тело 2 соответственно имеют следующие значения проекций $\boldsymbol{\upsilon_{21xт}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{21yт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22xт}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{22yт}}$ скоростей своего движения на оси $\mathbf{O_2x_2}$ и $\mathbf{O_2y_2}$, причем:

$$\upsilon_{21xт} = 0 \qquad (176)$$

$$\upsilon_{21yт} = -\upsilon \qquad (177)$$

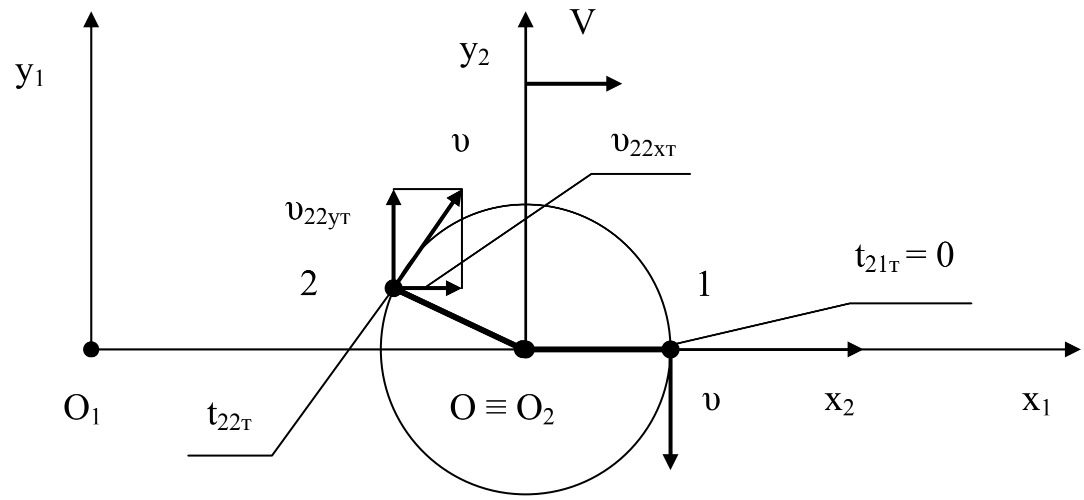

Рис. 8

Тогда исходя из формул (17), (19), (176) и (177) в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ в момент времени $\mathbf{t_{1т}}$ тело 1 и тело 2 соответственно будут иметь следующие значения проекций $\boldsymbol{\upsilon_{11xт}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{11yт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{12xт}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{12yт}}$ скоростей своего движения на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$:

$$\upsilon_{11xт} = V \qquad (178)$$

$$\upsilon_{11yт} = -(\upsilon / \beta) \qquad (179)$$

$$\upsilon_{12xт} = (V + \upsilon_{22xт}) / \boldsymbol{\{}\{[(\beta^2 - 1) \cdot \upsilon_{22xт}] / (\beta^2 \cdot V)\} + 1\boldsymbol{\}} \qquad (180)$$

$$\upsilon_{12yт} = \upsilon_{22yт} / \boldsymbol{\{}\{[(\beta^2 - 1) \cdot \upsilon_{22xт}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\boldsymbol{\}} \qquad (181)$$

Из уравнений (149) и (150) можно получить:

$$\upsilon_{22xт}^2 + \upsilon_{22yт}^2 = \upsilon^2 \qquad (182)$$

Используя закон сохранения импульса для замкнутой механической системы тел 1 и 2 в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ для моментов времени $\mathbf{t_{1p}}$ и $\mathbf{t_{1т}}$ с учетом формул (92), (93), (169), (171), (173) и (175) можно записать:

$$[M_o \cdot f\,(V = \upsilon_{11xp}) \cdot \upsilon_{11xp}] + [M_o \cdot f\,(V = \upsilon_{12xp}) \cdot \upsilon_{12xp}] = \{M_o \cdot f\,[V = (\upsilon_{11xт}{}^2+\upsilon_{11yт}{}^2)^{1/2}] \cdot \upsilon_{11xт}\} + \{M_o \cdot f\,[V = (\upsilon_{12xт}{}^2+\upsilon_{12yт}{}^2)^{1/2}] \cdot \upsilon_{12xт}\} \quad (183)$$

$$0 = \{M_o \cdot f\,[V=(\upsilon_{11xт}{}^2+\upsilon_{11yт}{}^2)^{1/2}] \cdot \upsilon_{11yт}\} + \{M_o \cdot f\,[V=(\upsilon_{12xт}{}^2+\upsilon_{12yт}{}^2)^{1/2}] \cdot \upsilon_{12yт}\} \quad (184)$$

Определение условий выполнения закона импульса при β>1 в примере № 3

В случае если коэффициент перехода $\boldsymbol{\beta>1}$, то значения $\boldsymbol{\beta}$ и функции **f (V)** определяются:

$$\beta_>{}^2 = 1 / [1 - (V^2 / v_{xкp1}{}^2)] \qquad (40)$$

$$f\,(V)_> = 1 / [1 - (V^2 / v_{xкp1}{}^2)]^{1/2} \qquad (112)$$

Тогда с учетом формулы (112) уравнения (183) и (184) примут вид:

$$\{(M_o\cdot\upsilon_{11xp})/[1-(\upsilon_{11xp}{}^2/v_{xкp1}{}^2)]^{1/2}\} + \{(M_o\cdot\upsilon_{12xp})/[1-(\upsilon_{12xp}{}^2/v_{xкp1}{}^2)]^{1/2}]\} = \boldsymbol{\{}(M_o\cdot\upsilon_{11xт}) / \{1-[(\upsilon_{11xт}{}^2+\upsilon_{11yт}{}^2)/v_{xкp1}{}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}(M_o \cdot \upsilon_{12xт})/\{1-[(\upsilon_{12xт}{}^2+\upsilon_{12yт}{}^2)/v_{xкp1}{}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} \quad (185)$$

$$0 = \boldsymbol{\{}(M_o \cdot \upsilon_{11yт}) / \{1 - [(\upsilon_{11xт}{}^2 + \upsilon_{11yт}{}^2) / v_{xкp1}{}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}(M_o \cdot \upsilon_{12yт}) / \{1 - [(\upsilon_{12xт}{}^2 + \upsilon_{12yт}{}^2) / v_{xкp1}{}^2]\}^{1/2}\boldsymbol{\}} \quad (186)$$

Формулы (172), (174) и (178)-:-(181) с учетом формулы (40) можно записать:

$$\upsilon_{11xp} = (V - \upsilon) / \{1 - [(V \cdot \upsilon)/v_{xкp1}{}^2]\} \qquad (187)$$

$$\upsilon_{12xp} = (V + \upsilon) / \{1 + [(V \cdot \upsilon)/ v_{xкp1}{}^2]\} \qquad (188)$$

$$\upsilon_{11xт} = V \qquad (178)$$

$$\upsilon_{11yт} = - \{\upsilon \cdot [1 - (V^2/ v_{xкp1}{}^2)]^{1/2}\} \qquad (189)$$

$$\upsilon_{12xт} = (V + \upsilon_{22xт}) / \{1 + [(V \cdot \upsilon_{22xт})/ v_{xкp1}{}^2]\} \qquad (190)$$

$$\upsilon_{12yт} = \{\upsilon_{22yт} \cdot [1 - (V^2/ v_{xкp1}{}^2)]^{1/2}\} / \{1 + [(V \cdot \upsilon_{22xт}) / v_{xкp1}{}^2]\} \qquad (191)$$

Вставив проекции скоростей $\boldsymbol{\upsilon_{11xp}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{12xp}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{11xт}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{11yт}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{12xт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{12yт}}$ из формул (178), (187)-:-(191) в уравнения (185) и (186) с учетом формулы (182) получим:

$\boldsymbol{\{}[M_o \cdot (V - \upsilon)] / \{[1 - (\upsilon^2/v_{xкp1}{}^2)]^{1/2} \cdot [1 - (V^2/v_{xкp1}{}^2)]^{1/2}\}\boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}[M_o \cdot (V + \upsilon)\,)] / \{[1 -$

$(\upsilon^2/v_{хкр1}{}^2)]^{1/2} \cdot [1 - (V^2/v_{хкр1}{}^2)]^{1/2}\}\} = \{(M_о \cdot V) / \{[1 - (\upsilon^2/v_{хкр1}{}^2)]^{1/2} \cdot [1 - (V^2/v_{хкр1}{}^2)]^{1/2}\}\} + \{[M_о \cdot (V + \upsilon_{22хт})]/\{[1 - (\upsilon^2/v_{хкр1}{}^2)]^{1/2} \cdot [1 - (V^2/v_{хкр1}{}^2)]^{1/2}\}\}$ (192)

$0 = - \{(M_о \cdot \upsilon) / [1 - (\upsilon^2/v_{хкр1}{}^2)]^{1/2}\} + \{(M_о \cdot \upsilon_{22ут}) / [1 - (\upsilon^2/v_{хкр1}{}^2)]^{1/2}\}$ (193)

Из уравнений (192) и (193) получаем необходимые условия (значения $\boldsymbol{\upsilon_{22хт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22ут}}$), при которых в примере № 3 при коэффициенте перехода **β>1** будет выполняться закон сохранения импульса в неподвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

$\upsilon_{22хт} = 0$ (194)

$\upsilon_{22ут} = \upsilon$ (195)

Подставив условия (194) и (195) в уравнения (149) и (150), получим:

$t_{22т} = t_{21т} = 0$ (196)

А подставив уравнение (196) в формулу (167):

$\omega \cdot 0 = [1 - (1/ \beta^2)] \cdot (1 + 1) \cdot (\upsilon / V)$ (197)

получим еще одно условие выполнения закона сохранения импульса в неподвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ для примера № 3:

$\beta = 1$ (198)

Таким образом получается, что в замкнутой механической системе тел, рассматриваемой в примере № 3, для значений коэффициента перехода **β>1** закон сохранения импульса не выполняется.

Определение условий выполнения закона импульса при 0<β<1 в примере №3

В случае если коэффициенте перехода **0 < β < 1** , то значения **β** и **f (V)** определяются:

$\beta_{<}{}^2 = 1 / [1 + (V^2 / v_{хкр2}{}^2)]$ (41)

$f(V)_{<} = 1 / [1 + (V^2 / v_{хкр2}{}^2)]^{1/2}$ (133)

Тогда с учетом формулы (133) уравнения (183) и (184) примут вид:

$\{(M_о \cdot \upsilon_{11хр})/ [1+(\upsilon_{11хр}{}^2/v_{хкр2}{}^2)]^{1/2}\} + \{(M_о \cdot \upsilon_{12хр})/[1+(\upsilon_{12хр}{}^2/v_{хкр2}{}^2)]^{1/2}\} = \{(M_о \cdot \upsilon_{11хт}) / \{1+[(\upsilon_{11хт}{}^2+\upsilon_{11ут}{}^2)/v_{хкр2}{}^2]\}^{1/2}\} + \{(M_о \upsilon_{12хт})/\{1+[(\upsilon_{12хт}{}^2+\upsilon_{12ут}{}^2)/v_{хкр2}{}^2]\}^{1/2}\}$ (199)

$0 = \{(M_о \cdot \upsilon_{11ут}) / \{1 + [(\upsilon_{11хт}{}^2 + \upsilon_{11ут}{}^2) / v_{хкр2}{}^2]\}^{1/2}\} + \{(M_о \cdot \upsilon_{12ут}) / \{1 +$

$[(\upsilon_{12xт}{}^2 + \upsilon_{12yт}{}^2) / v_{xкр2}{}^2\ ]\}^{1/2}\}$ (200)

Формулы (172), (174) и (178)-:-(181) с учетом формулы (41) можно записать:

$\upsilon_{11xр} = (V - \upsilon) / \{1 + [(V \cdot \upsilon)/v_{xкр2}{}^2]\}$ (201)

$\upsilon_{12xр} = (V + \upsilon) / \{1 - [(V \cdot \upsilon)/ v_{xкр2}{}^2]\}$ (202)

$\upsilon_{11xт} = V$ (178)

$\upsilon_{11yт} = - \{\upsilon \cdot [1 + (V^2/ v_{xкр2}{}^2)]^{1/2}\}$ (203)

$\upsilon_{12xт} = (V + \upsilon_{22xт}) / \{1 - [(V \cdot \upsilon_{22xт})/ v_{xкр2}{}^2]\}$ (204)

$\upsilon_{12yт} = \{\upsilon_{22yт} \cdot [1 + (V^2/ v_{xкр2}{}^2)]^{1/2}\} / \{1 - [(V \cdot \upsilon_{22xт}) / v_{xкр2}{}^2]\}$ (205)

Вставив проекции скоростей $\boldsymbol{\upsilon_{11xр}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{12xр}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{11xт}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{11yт}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{12xт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{12yт}}$ из формул (178), (201)-:-(205) в уравнения (199) и (200) с учетом формулы (182) получим:

$\{[M_o \cdot (V - \upsilon)] / \{[1 + (\upsilon^2/v_{xкр2}{}^2)]^{1/2} \cdot [1 + (V^2/v_{xкр2}{}^2)]^{1/2}\}\} + \{[M_o \cdot (V + \upsilon))] / \{[1 + (\upsilon^2/v_{xкр2}{}^2)]^{1/2} \cdot [1 + (V^2/v_{xкр2}{}^2)]^{1/2}\}\} = \{(M_o \cdot V) / \{[1 + (\upsilon^2/v_{xкр2}{}^2)]^{1/2} \cdot [1 + (V^2/v_{xкр2}{}^2)]^{1/2}\}\} + \{[M_o \cdot (V + \upsilon_{22xт})]/\{[1 + (\upsilon^2/v_{xкр2}{}^2)]^{1/2} \cdot [1 + (V^2/v_{xкр2}{}^2)]^{1/2}\}\}$ (206)

$0 = - \{(M_o \cdot \upsilon) / [1 + (\upsilon^2/v_{xкр2}{}^2)]^{1/2}\} + \{(M_o \cdot \upsilon_{22yт}) / [1 + (\upsilon^2/v_{xкр2}{}^2)]^{1/2}\}$ (207)

Из уравнений (206) и (207) получаем необходимые условия (значения $\boldsymbol{\upsilon_{22xт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22yт}}$), при которых в примере № 3 при коэффициенте перехода $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$ будет выполняться закон сохранения импульса в неподвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

$\upsilon_{22xт} = 0$ (194)

$\upsilon_{22yт} = \upsilon$ (195)

А это означает, что:

$t_{22т} = t_{21т} = 0$ (196)

и условием выполнения закона сохранения импульса в неподвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ для примера № 3 также является:

$\beta = 1$ (198)

Таким образом получается, что в замкнутой механической системе тел, рассматриваемой в примере № 3, и для значений коэффициента перехода $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$ закон сохранения импульса не выполняется.

Подтвердим выше сказанное числовыми расчетами.

1) для случая, когда значения коэффициента перехода β>1

Предположим, что $\mathbf{V} / \mathbf{v}_{\mathbf{xкр1}} = 0,9$, $\boldsymbol{\upsilon} / \mathbf{v}_{\mathbf{xкр1}} = 0,6$.

Уравнение (167) с учетом формулы (40) можно записать в виде:

$$\omega \cdot t_{22т} = [(\upsilon \cdot V)/ v_{xкр1}{}^2] \cdot [1 + \text{Cos}\,(\omega \cdot t_{22т})] \qquad (208)$$

Тогда получим:

$\boldsymbol{\omega \cdot t_{22т}} = 0,8828669738$, проекции $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{22xт}} / \mathbf{v}_{\mathbf{xкр1}} = 0,4635374427$ и $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{22yт}} / \mathbf{v}_{\mathbf{xкр1}} = 0,3809633042$ скорости движения тела 2 в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$.

В неподвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

а) в момент времени $\mathbf{t_{1р}}$ тела 1 и 2 соответственно имели проекции $\mathbf{K}_{\mathbf{11xр}} / \mathbf{v}_{\mathbf{xкр1}} = 0,860309002$ и $\mathbf{K}_{\mathbf{12xр}} / \mathbf{v}_{\mathbf{xкр1}} = 4,30154501$ импульса на ось $\mathbf{O_1x_1}$;

б) в момент времени $\mathbf{t_{1т}}$ тело 1 имело проекции $\mathbf{K}_{\mathbf{11xт}} / \mathbf{v}_{\mathbf{xкр1}} = 2,580927006$ и $\mathbf{K}_{\mathbf{11yт}} / \mathbf{v}_{\mathbf{xкр1}} = -0,75$ импульса на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$;

в) в момент времени $\mathbf{t_{1т}}$ тело 2 имело проекции $\mathbf{K}_{\mathbf{12xт}} / \mathbf{v}_{\mathbf{xкр1}} = 3,9102117884$ и $\mathbf{K}_{\mathbf{12yт}} / \mathbf{v}_{\mathbf{xкр1}} = 0,4762041303$ импульса на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$;

г) в момент времени $\mathbf{t_{1р}}$ система тел 1 и 2 имела проекции $\mathbf{K}_{\mathbf{11x\Sigma р}} / \mathbf{v}_{\mathbf{xкр1}} = 5,161854012$ и $\mathbf{K}_{\mathbf{12y\Sigma р}} / \mathbf{v}_{\mathbf{xкр1}} = 0$ импульса на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$;

д) в момент времени $\mathbf{t_{1т}}$ система тел 1 и 2 имела проекции $\mathbf{K}_{\mathbf{11x\Sigma т}} / \mathbf{v}_{\mathbf{xкр1}} = 6,491138794$ и $\mathbf{K}_{\mathbf{12y\Sigma т}} / \mathbf{v}_{\mathbf{xкр1}} = -0,2737958696$ импульса на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$.

Закон сохранения импульса не выполняется, т.к.: 5,161854012 # 6,491138794 и – 0,2737958696 # 0 .

2) для случая, когда значения коэффициента перехода 0 < β < 1

Предположим, что $\mathbf{V} / \mathbf{v}_{\mathbf{xкр2}} = 0,9$, $\boldsymbol{\upsilon} / \mathbf{v}_{\mathbf{xкр2}} = 0,6$.

Уравнение (167) с учетом формулы (41) можно записать в виде:

$$\omega \cdot t_{22т} = -\, [(\upsilon \cdot V)/ v_{xкр2}{}^2] \cdot [1 + \text{Cos}\,(\omega \cdot t_{22т})] \qquad (209)$$

Тогда получим:

$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t}_{22т}$ = – 0,8828669738, проекции $\boldsymbol{\upsilon}_{22xт}$ / $\mathbf{v}_{xкр2}$ = – 0,4635374427 и $\boldsymbol{\upsilon}_{22yт}$ / $\mathbf{v}_{xкр2}$ = 0,3809633042 скорости движения тела 2 в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$.

В неподвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

а) в момент времени $\mathbf{t}_{1р}$ тела 1 и 2 соответственно имели проекции $\mathbf{K}_{11xр}$/$\mathbf{v}_{xкр2}$ = 0,1912108416 и $\mathbf{K}_{12xр}$/$\mathbf{v}_{xкр2}$ = 0,9560542082 импульса на ось $\mathbf{O_1x_1}$;

б) в момент времени $\mathbf{t}_{1т}$ тело 1 имело проекции $\mathbf{K}_{11xт}$ / $\mathbf{v}_{xкр2}$ = 0,5736325249 и $\mathbf{K}_{11yт}$ / $\mathbf{v}_{xкр2}$ = – 0,5144957554 импульса на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$ соответственно;

в) в момент времени $\mathbf{t}_{1т}$ тело 2 имело проекции $\mathbf{K}_{12xт}$ / $\mathbf{v}_{xкр2}$ = 0,2781879097 и $\mathbf{K}_{12yт}$ / $\mathbf{v}_{xкр2}$ = 0,3266733383 импульса на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$;

г) в момент времени $\mathbf{t}_{1р}$ система тел 1 и 2 имела проекции $\mathbf{K}_{11x\Sigma р}$ / $\mathbf{v}_{xкр2}$ = 1,1472650498 и $\mathbf{K}_{12y\Sigma р}$ / $\mathbf{v}_{xкр2}$ = 0 импульса на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$;

д) в момент времени $\mathbf{t}_{1т}$ система тел 1 и 2 имела проекции $\mathbf{K}_{11x\Sigma т}$ / $\mathbf{v}_{xкр2}$ = 0,8518204346 и $\mathbf{K}_{12y\Sigma т}$ / $\mathbf{v}_{xкр2}$ = – 0,187822417 импульса на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$.

Закон сохранения импульса не выполняется, т.к.: 1,1472650498 # 0,8518204346 и – 0,187822417 # 0 .

Из рассмотрения примера № 3 получается, что при значениях коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ в диапазонах $\boldsymbol{\beta > 1}$ и $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$ в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ импульс замкнутой механической системы тел 1 и 2 в момент времени, когда тела 1 и 2 находятся на линии параллельной оси $\mathbf{O_1y_1}$, не равен импульсу этой системы тел 1 и 2 в любой другой момент времени, когда тела 1 и 2 находятся на линии не параллельной оси $\mathbf{O_1y_1}$, **т.е. в неподвижной (инерциальной) системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ замкнутая механическая система тел 1 и 2 будет иметь меняющийся во времени импульс, что является нарушением закона сохранения импульса замкнутой механической системы тел.**

14. Заключение

В заключение можно обобщить выше написанное.

Кинематика

Использование принципа относительности и симметрии пространства и времени позволило:

1. перейти от системы уравнений связи инерциальных систем отсчета неподвижной $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижной $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

$$x_1 = \beta_1 \cdot (x_2 + V_1 \cdot t_2) \quad (1)$$

$$x_2 = \beta_2 \cdot (x_1 + V_2 \cdot t_1) \quad (2)$$

$$y_1 = \beta_3 \cdot y_2 \quad (3)$$

$$y_2 = \beta_4 \cdot y_1 \quad (4)$$

$$z_1 = \beta_5 \cdot z_2 \quad (5)$$

$$z_2 = \beta_6 \cdot z_1 \quad (6)$$

к системе уравнений:

$$x_1 = \beta \cdot (x_2 + V \cdot t_2) \quad (11)$$

$$x_2 = \beta \cdot (x_1 - V \cdot t_1) \quad (12)$$

$$y_1 = y_2 \quad (13)$$

$$z_1 = z_2 \quad (14)$$

2. установить, что значения коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ для инерциальных систем отсчета могут находиться в трех взаимоисключающих диапазонах:

- $\boldsymbol{\beta > 1}$,
- $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$,
- $\boldsymbol{\beta = 1}$;

3. получить формулу для коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ для инерциальных систем отсчета для случая $\boldsymbol{\beta > 1}$:

$$\beta_>^{\,2} = 1 / [1 - (V^2 / v_{хкр1}^{\,2})] \quad (40)$$

где: $\mathbf{v_{хкр1}}$ - постоянная действительная величина;

4. получить формулу для коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ для инерциальных систем отсчета для случая $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$:

$$\beta_<^{\,2} = 1 / [1 + (V^2 / v_{хкр2}^{\,2})] \quad (41)$$

где: $\mathbf{v_{хкр2}}$ - постоянная действительная величина;

5. установить, что при коэффициенте перехода $\boldsymbol{\beta > 1}$ существует такое действительное значение скорости $\mathbf{V_{хкр}}$ (равное $\mathbf{v_{хкр1}}$) движения точки, которое было бы инвариантно во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета:

$$v_{хкр1} = \mathrm{Const} \qquad (58)$$

6. установить, что при коэффициенте перехода $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$ имеет место только мнимое значение скорости $\mathbf{V_{хкр}}$ (равное $\mathbf{(i \cdot v_{хкр2})}$) движения точки, которое было бы инвариантно во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета:

$$v_{хкр2} = \mathrm{Const} \qquad (59)$$

Динамика

1. Используя обязательность выполнения в инерциальных системах отсчета закона сохранения импульса и закона сохранения механической энергии (а точнее его частного случая - закона сохранения кинетической энергии) для замкнутой механической системы тел, двигающихся прямолинейно и испытывающих только абсолютно упругие взаимодействия, были получены зависимости массы, импульса и кинетической энергии тела от скорости его движения:

- при $\boldsymbol{\beta > 1}$:

$$M(V)_{>} = M_o / [1 - (V^2 / v_{хкр1}{}^2)]^{1/2} \qquad (113)$$

$$P(V)_{>} = (M_o \cdot V) / [1 - (V^2 / v_{хкр1}{}^2)]^{1/2} \qquad (114)$$

$$E_к(V)_{>} = M_o \cdot v_{хкр1}{}^2 \cdot \boldsymbol{\{}\{1 / [1 - (V^2 / v_{хкр1}{}^2)]^{1/2}\} - 1\boldsymbol{\}} \qquad (115)$$

- при $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$:

$$M(V)_{<} = M_o / [1 + (V^2 / v_{хкр2}{}^2)]^{1/2} \qquad (134)$$

$$P(V)_{<} = (M_o \cdot V) / [1 + (V^2 / v_{хкр2}{}^2)]^{1/2} \qquad (135)$$

$$E_к(V)_{<} = M_o \cdot v_{хкр2}{}^2 \cdot \boldsymbol{\{} 1 - \{1 / [1 + (V^2 / v_{хкр2}{}^2)]^{1/2}\}\boldsymbol{\}} \qquad (136)$$

2. Закон сохранения импульса замкнутой механической системы тел, двигающихся непрямолинейно, для любого момента времени в

инерциальных системах отсчета (во всех, кроме системы отсчета, в которой центр масс системы тел неподвижен) не выполняется:

- при **$\beta > 1$** ,

- при **$0 < \beta < 1$,**

а выполняется только при $\beta = 1$.

Таким образом, исходя из того, что в отдельном примере происходит невыполнение закона сохранения импульса замкнутой механической системы тел, можно сделать неутешительный вывод:

- в однонаправленных инерциальных системах отсчета коэффициент перехода β не может быть больше или меньше 1, а может быть только равен 1 ;

- в инерциальных системах отсчета коэффициент перехода β не зависит от величины скорости V движения инерциальных систем отсчета.

Здесь также следует отметить, что вывод сделан только для случая однородности и изотропности пространства и однородности времени.

Данный вывод может оказаться неправильным, если удастся доказать, что функция **$f\ (V)$** может быть представлена не только функциями **$f\ (V)_{>}$** (формула (112)) и **$f\ (V)_{<}$** (формула (133)).

P.S.: Основные идеи изложены в статье "Специальная теория относительности без постулата о постоянстве скорости света", напечатанной в журнале "Актуальные проблемы современной науки" (ISSN 1680-2721) № 1 (34) за 2007 год.

Автор В.Н. Кочетков

Статья "Комментарии к специальной теории относительности" размещена 8 февраля 2007 года на сайте "Новые идеи и гипотезы" http://new-idea.kulichki.net/?mode=physics