Рубрика: математическая физика.

Тематика: специальная теория относительности.

Кочетков Виктор Николаевич
главный специалист ФГУП «Центр эксплуатации объектов наземной космической инфраструктуры» (ФГУП «ЦЭНКИ»)

КРАТКИЕ КОММЕНТАРИИ К СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В данной статье делается попытка определения пространственно-временной связи для инерциальных систем отсчета.

I. Кинематика

1. Основные уравнения специальной теории относительности

Предположим, что имеются две инерциальные системы отсчета неподвижная $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижная $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, изображенные на рис.1.

Исходя из симметрии пространства и времени (однородности и изотропности пространства и однородности времени), соотношения между координатами и временем одного и того же события в двух инерциальных системах отсчета неподвижной $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижной $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ могут быть записаны следующим образом:

$$x_1 = \beta \cdot (x_2 + V \cdot t_2) \qquad (1)$$

$$x_2 = \beta \cdot (x_1 - V \cdot t_1) \qquad (2)$$

$$y_1 = y_2 \qquad (3)$$

$$z_1 = z_2 \qquad (4)$$

где: $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{z_1}$ и $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{y_2}$, $\mathbf{z_2}$ – координаты точки **A** в системах отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ соответственно;

t_1 и **t_2** - значения времени в системах отсчета **$O_1x_1y_1z_1$** и **$O_2x_2y_2z_2$** соответственно;

β - коэффициент перехода, предположительно являющейся функцией скорости **V**;

V - скорость движения система **$O_2x_2y_2z_2$** относительно системы **$O_1x_1y_1z_1$**.

В преобразованиях Лоренца коэффициент перехода **β** равен:

$$\beta = 1 / [1 - (V^2 / c^2)]^{1/2} \qquad (5)$$

где: **c** - скорость света в вакууме.

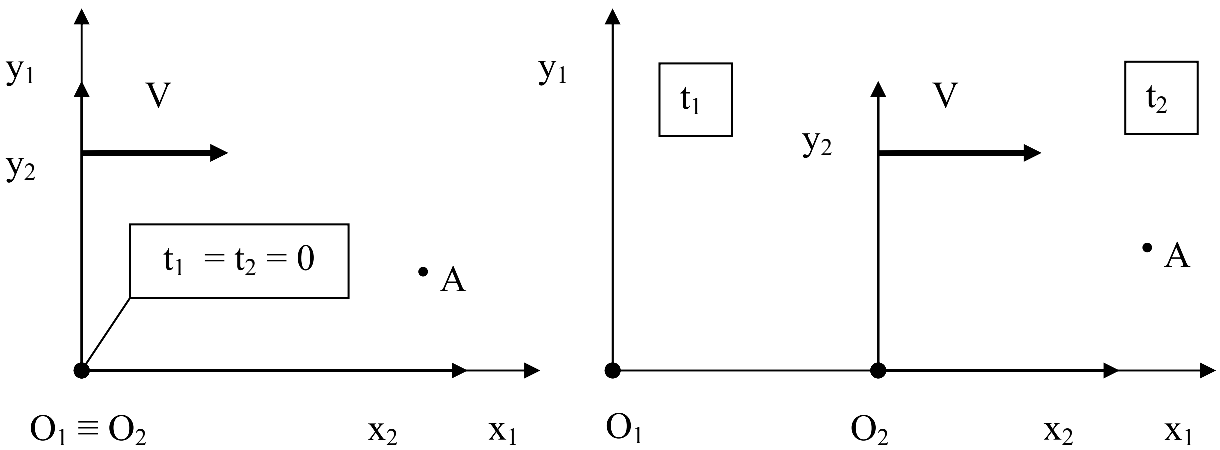

Рис. 1

Из формул (1) и (2) можно записать зависимость для значений времен **t_1** и **t_2**:

$$t_1 = \{[(\beta^2 - 1) \cdot x_2] / (\beta \cdot V)\} + (\beta \cdot t_2) \qquad (6)$$

$$t_2 = \{[(1 - \beta^2) \cdot x_1] / (\beta \cdot V)\} + (\beta \cdot t_1) \qquad (7)$$

Используя формулы (1) -:- (4) и (6) -:- (7) может быть получена связь между проекциями **v_{x2}**, **v_{y2}** и **v_{z2}** скорости движения точки **A** в подвижной системе **$O_2x_2y_2z_2$** на оси декартовых координат и аналогичными проекциями **v_{x1}**, **v_{y1}** и **v_{z1}** скорости этой точки **A** в неподвижной системе **$O_1x_1y_1z_1$**:

$$v_{x1} = (v_{x2} + V) / \{\{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta^2 \cdot V)\} + 1\} \qquad (8)$$

$$v_{x2} = (v_{x1} - V) / \{\{[(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta^2 \cdot V)\} + 1\} \qquad (9)$$

$v_{y1} = v_{y2} / \{\{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\}$ (10)

$v_{y2} = v_{y1} / \{\{[(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\}$ (11)

$v_{z1} = v_{z2} / \{\{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\}$ (12)

$v_{z2} = v_{z1} / \{\{[(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\}$ (13)

2. Определение особой скорости

Допустим, что существует такое значение $\mathbf{V_{xкр}}$ проекции $\mathbf{v_{x1}}$ скорости движения точки **A** в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$, которому бы соответствовала значение проекции $\mathbf{v_{x2}}$ скорости движения этой же точки **A** в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, равное $\mathbf{V_{xкр}}$, т.е. когда:

$v_{x1} = v_{x2} = V_{xкр}$ (14)

Подставив значение (14) в формулу (8) или (9), получим:

$V_{xкр}^2 = (\beta^2 \cdot V^2) / (\beta^2 - 1)$ (15)

Из формулы (15) следует зависимость $\mathbf{V_{xкр}}$ от величины скорости **V**:

$V_{xкр} = \pm (\beta \cdot V) / (\beta^2 - 1)^{1/2}$ (16)

В случае если коэффициент перехода $\boldsymbol{\beta}$ имеет значение $\boldsymbol{\beta \geq 1}$, получим, что $\mathbf{V_{xкр}}$ будет иметь действительное значение и ее для дальнейшего рассмотрения запишем, как:

$V_{xкр} = v_{xкр1} = \pm (\beta \cdot V) / (\beta^2 - 1)^{1/2}$ (17)

где: $\mathbf{v_{xкр1}}$ - действительная величина, имеющая размерность скорости.

А в случае если коэффициент перехода $\boldsymbol{\beta}$ имеет значение $\mathbf{0 < \boldsymbol{\beta} < 1}$, получим, что $\mathbf{V_{xкр}}$ будет иметь мнимое значение и ее для дальнейшего рассмотрения запишем, как :

$V_{xкр} = \acute{\imath} \cdot v_{xкр2} = \pm (\acute{\imath} \cdot \beta \cdot V) / (1 - \beta^2)^{1/2}$ (18)

где: $\mathbf{v_{xкр2}}$ - действительная величина, имеющая размерность скорости.

Из формулы (15) можно получить зависимость коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ от величины скорости **V**:

$\beta^2 = 1 / [1 - (V^2 / V_{xкр}^2)]$ (19)

Тогда из формулы (19) с учетом формулы (17) для коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$, имеющего значения $\boldsymbol{\beta \geq 1}$ и который обозначим как $\boldsymbol{\beta_{>}}$, можно записать:

$$\beta_>^{\ 2} = 1 / [1 - (V^2 / v_{хкр1}^{\ 2})] \qquad (20)$$

А из формулы (19) с учетом формулы (18) для коэффициента перехода **β**, имеющего значения **0<β< 1** и который обозначим как **β<**, можно записать:

$$\beta_<^{\ 2} = 1 / [1 + (V^2 / v_{хкр2}^{\ 2})] \qquad (21)$$

3. Уравнение связи для коэффициентов перехода

На Рис.2 показаны три инерциальные системы отсчета неподвижной $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижные $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ и $\mathbf{O_3x_3y_3z_3}$, движущиеся относительно системы отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ со скоростями $\mathbf{V_2}$ и $\mathbf{V_3}$ соответственно.

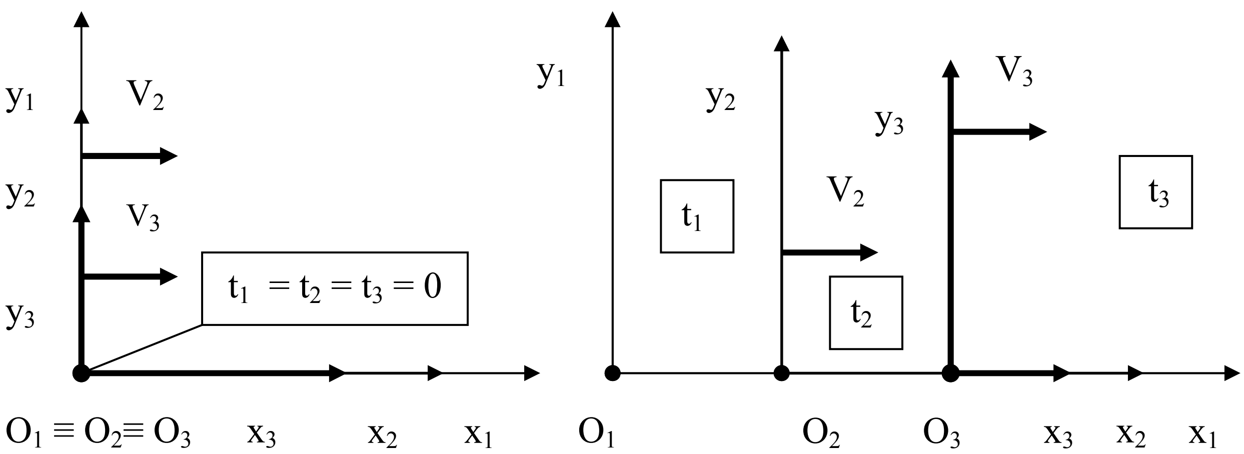

Рис. 2

Опираясь на формулу (9) можно определить значение скорости $\mathbf{V_{23}}$ движения точки $\mathbf{O_3}$ относительно точки $\mathbf{O_2}$:

$$V_{23} = (V_3 - V_2) / \boldsymbol{\{}\{[(1 - \beta_2^{\ 2}) \cdot V_3] / (\beta_2^{\ 2} \cdot V_2)\} + 1\boldsymbol{\}} \qquad (22)$$

и значение скорости $\mathbf{V_{32}}$ движения точки $\mathbf{O_2}$ относительно точки $\mathbf{O_3}$:

$$V_{32} = (V_2 - V_3) / \boldsymbol{\{}\{[(1 - \beta_3^{\ 2}) \cdot V_2] / (\beta_3^{\ 2} \cdot V_3)\} + 1\boldsymbol{\}} \qquad (23)$$

где: $\boldsymbol{\beta_2}$ и $\boldsymbol{\beta_3}$ - коэффициенты перехода для инерциальных систем отсчета, движущихся относительно неподвижной системы отсчета со скоростью $\mathbf{V_2}$ и $\mathbf{V_3}$ соответственно.

Используя принцип относительности, согласно которому точка $\mathbf{O_3}$ будет удаляться относительно точки $\mathbf{O_2}$ со скоростью, равной по абсолютной величине и противоположно направленной скорости, с которой точка $\mathbf{O_2}$ удаляется относительно точки $\mathbf{O_3}$, т.е.:

$$V_{32} = - V_{23} \qquad (24)$$

Подставив уравнение (24) в формулы (22) и (23) получим:

$$\{[(1 - \beta_2^2) \cdot V_3] / (\beta_2^2 \cdot V_2)\} + 1 = \{[(1 - \beta_3^2) \cdot V_2] / (\beta_3^2 \cdot V_3)\} + 1 \qquad (25)$$

Отсюда уравнение для коэффициентов перехода $\boldsymbol{\beta_2}$ и $\boldsymbol{\beta_3}$ запишется следующим образом:

$$\beta_3^2 = (\beta_2^2 \cdot V_2) / [V_3^2 - (\beta_2^2 \cdot V_3) + (\beta_2^2 \cdot V_2)] \qquad (26)$$

4. Получение зависимости для коэффициента перехода

Из уравнения (25) можно получить формулу:

$$(\beta_2^2 - 1) / (\beta_2^2 \cdot V_2^2) = (\beta_3^2 - 1) / (\beta_3^2 \cdot V_3^2) \qquad (27)$$

Так как величины коэффициентов перехода $\boldsymbol{\beta_2}$ и $\boldsymbol{\beta_3}$ не зависят друг от друга, а зависят только от величин скоростей $\mathbf{V_2}$ и $\mathbf{V_3}$ соответственно, и величины скоростей $\mathbf{V_2}$ и $\mathbf{V_3}$ задавались произвольно (также не зависят друг от друга), то можно сказать, что:

$$(\beta_2^2 - 1) / (\beta_2^2 \cdot V_2^2) = (\beta_3^2 - 1) / (\beta_3^2 \cdot V_3^2) = K = \mathbf{Const} \qquad (28)$$

т.е. получается в общем виде, что:

$$(\beta^2 - 1) / (\beta^2 \cdot V^2) = K = \mathbf{Const} \qquad (29)$$

где: **К** - постоянная величина, независящая от величины скорости $\mathbf{V}$ ($\mathbf{V_2}$ и $\mathbf{V_3}$) и величины коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{\beta_2}$ и $\boldsymbol{\beta_3}$) и имеющая размерность обратную квадрата скорости.

Из формулы (29) при величине коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta \geq 1}$ константа **К** будет иметь действительное положительное значение и ее для дальнейшего рассмотрения запишим, как:

$$K = K_{>} = (\beta_{>}^2 - 1) / (\beta_{>}^2 \cdot V^2) \qquad (30)$$

где: $\mathbf{K_{>}}$ - положительная постоянная величина, независящая от величины скорости $\mathbf{V}$ и величины коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ (в диапазоне значений $\boldsymbol{\beta} \geq 1$);

$\boldsymbol{\beta_{>}}$ - коэффициент перехода $\boldsymbol{\beta}$, значения которого находятся в диапазоне значений $\boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{1}$.

А из формулы (29) при величине коэффициента перехода $\mathbf{0} < \boldsymbol{\beta} < \mathbf{1}$ константа **К** будет иметь действительное отрицательное значение и которую для дальнейшего рассмотрения запишим, как:

$$К = К_< = (\beta_<^2 - 1) / (\beta_<^2 \cdot V^2) \qquad (31)$$

где: $\mathbf{К_<}$ - отрицательная постоянная величина, независящая от величины скорости **V** и величины коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ (в диапазоне значений $\mathbf{0} < \boldsymbol{\beta} < \mathbf{1}$);

$\boldsymbol{\beta_<}$ - коэффициент перехода $\boldsymbol{\beta}$, значения которого находятся в диапазоне значений $\mathbf{0} < \boldsymbol{\beta} < \mathbf{1}$.

Также можно отметить, что исходя из того, что константа **К** , независящая от величины скорости **V** и величины коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$, не может быть одновременно положительной величиной ($\mathbf{К_>}$) и отрицательной величиной ($\mathbf{К_<}$), следует, что диапазоны $\boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{1}$ и $\mathbf{0} < \boldsymbol{\beta} < \mathbf{1}$ являются взаимоисключающими диапазонами коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$.

Из уравнения (29) можно получить формулу для коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$:

$$\beta^2 = 1 / [1 - (К \cdot V^2)] \qquad (32)$$

Если вернуться к формуле (19):

$$\beta^2 = 1 / [1 - (V^2 / V_{хкр}^2)] \qquad (19)$$

и сравнить ее с формулой (32), то можно отметить, что:

$$К = 1 / V_{хкр}^2 \qquad (33)$$

т.е. $\mathbf{V_{хкр}^2}$ будет являться постоянной величиной, независящей от скорости **V**.

Для случая коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{1}$ формула (32) с учетом формулы (30) примет вид:

$$\beta_>^2 = 1 / [1 - (К_> \cdot V^2)] \qquad (34)$$

А для случая коэффициента перехода $\mathbf{0} < \boldsymbol{\beta} < \mathbf{1}$ формула (32) с учетом формулы (31) примет вид:

$$\beta_<^2 = 1 / [1 - (К_< \cdot V^2)] \qquad (35)$$

Если вернуться к формулам (20) и (21):

$\beta_{>}{}^{2} = 1 / [1 - (V^2 / v_{хкр1}{}^2)]$ (20)

$\beta_{<}{}^{2} = 1 / [1 + (V^2 / v_{хкр2}{}^2)]$ (21)

и сравнивая их с формулами (34) и (35), то можно отметить, что:

$К_{>} = 1 / v_{хкр1}{}^2$ (36)

$К_{<} = -(1 / v_{хкр2}{}^2)$ (37)

А учитывая, что $\mathbf{К_{>}}$ и $\mathbf{К_{<}}$ являются постоянными величинами, независящими от величины скорости **V** перемещения подвижной системы отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ относительно покоящейся системы $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$, можно сделать следующий вывод:

что $\mathbf{v_{хкр1}}$ и $\mathbf{v_{хкр2}}$ тоже являются постоянными величинами, не зависящими от величины скорости **V**, т.е.:

$\mathbf{v_{хкр1} = Const}$ (38)

$\mathbf{v_{хкр2} = Const}$ (39)

А возвращаясь к формуле (17) с учетом формулы (38) можно отметить, что в случае, если коэффициент перехода $\boldsymbol{\beta > 1}$, то должна существовать величина скорости $\mathbf{V_{хкр}}$ (равная $\mathbf{v_{хкр1}}$) движения точки, которая была бы инвариантна во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета.

Формулы (18) и (39) показывают, что для случая, если коэффициент перехода $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$, то особая скорость $\mathbf{V_{хкр}}$ (равная $\mathbf{(í \cdot v_{хкр2})}$) будет величиной мнимой постоянной и инвариантной во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета.

5. Основные уравнения специальной теории относительности при β ≥ 1

Подставив формулу (20) в уравнения (1), (2), (6)-:-(7) и (8)-:-(13), получим следующую систему уравнений при коэффициенте перехода $\boldsymbol{\beta = \beta_{>}}$:

$x_{1>} = [x_{2>} + (V \cdot t_{2>})] / [1 - (V^2 / v_{хкр1}{}^2)]^{1/2}$ (40)

$x_{2>} = [x_{1>} - (V \cdot t_{1>})] / [1 - (V^2 / v_{хкр1}{}^2)]^{1/2}$ (41)

$$t_{1>} = \{t_{2>} + [(V \cdot x_{2>}) / v_{хкр1}^2]\} / [(1 - V^2/v_{хкр1}^2)^{1/2}] \qquad (42)$$

$$t_{2>} = \{t_{1>} - [(V \cdot x_{1>}) / v_{хкр1}^2]\}/ [(1 - V^2/v_{хкр1}^2)^{1/2}] \qquad (43)$$

$$v_{x1>} = (v_{x2>} + V) / \{1 + [(V \cdot v_{x2>})/ v_{хкр1}^2)]\} \qquad (44)$$

$$v_{x2>} = (v_{x1>} - V) / \{1 - [(V \cdot v_{x1>})/ v_{хкр1}^2)]\} \qquad (45)$$

$$v_{y1>} = \{v_{y2>} \cdot [1 - (V^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} / \{1 + [(V \cdot v_{x2>})/ v_{хкр1}^2)]\} \qquad (46)$$

$$v_{y2>} = \{v_{y1>} \cdot [1 - (V^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} / \{1 - [(V \cdot v_{x1>})/ v_{хкр1}^2)]\} \qquad (47)$$

$$v_{z1>} = \{v_{z2>} \cdot [1 - (V^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} / \{1 + [(V \cdot v_{x2>})/ v_{хкр1}^2)]\} \qquad (48)$$

$$v_{z2>} = \{v_{z1>} \cdot [1 - (V^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2}\} / \{1 - [(V \cdot v_{x1>})/ v_{хкр1}^2)]\} \qquad (49)$$

6. Основные уравнения специальной теории относительности при 0 < β < 1

Подставив формулу (21) в уравнения (1), (2), (6)-:-(7) и (8)-:-(13), получим систему уравнений для случая, когда коэффициент перехода **$\beta = \beta_<$**:

$$x_{1<} = [x_{2<} + (V \cdot t_{2<})] / [1 + (V^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2} \qquad (50)$$

$$x_{2<} = [x_{1<} - (V \cdot t_{1<})] / [1 + (V^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2} \qquad (51)$$

$$t_{1<} = \{t_{2<} - [(V \cdot x_{2<}) / v_{хкр2}^2]\} / [(1 + V^2/v_{хкр2}^2)^{1/2}] \qquad (52)$$

$$t_{2<} = \{t_{1<} + [(V \cdot x_{1<}) / v_{хкр2}^2]\}/ [(1 + V^2/v_{хкр2}^2)^{1/2}] \qquad (53)$$

$$v_{x1<} = (v_{x2<} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{x2<})/ v_{хкр2}^2)]\} \qquad (54)$$

$$v_{x2<} = (v_{x1<} - V) / \{1 + [(V \cdot v_{x1<})/ v_{хкр2}^2)]\} \qquad (55)$$

$$v_{y1<} = \{v_{y2<} \cdot [1 + (V^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2}\} / \{1 - [(V \cdot v_{x2<})/ v_{хкр2}^2)]\} \qquad (56)$$

$$v_{y2<} = \{v_{y1<} \cdot [1 + (V^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2}\} / \{1 + [(V \cdot v_{x1<})/ v_{хкр2}^2)]\} \qquad (57)$$

$$v_{z1<} = \{v_{z2<} \cdot [1 + (V^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2}\} / \{1 - [(V \cdot v_{x2<})/ v_{хкр2}^2)]\} \qquad (58)$$

$$v_{z2<} = \{v_{z1<} \cdot [1 + (V^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2}\} / \{1 + [(V \cdot v_{x1<})/ v_{хкр2}^2)]\} \qquad (59)$$

II. Динамика

1. Системы уравнений для определения зависимости массы движущегося тела от скорости

Воспользуемся принципом относительности, утверждающим, что физические законы инвариантны по отношению к выбору инерциальной системы отсчета, т.е. уравнения, выражающие эти законы, имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета.

Для определения зависимости массы движущегося тела от его скорости перемещения воспользуемся:

- законом сохранения импульса: **импульс замкнутой (на которую не действуют внешние силы) механической системы тел для любого момента времени являются величиной постоянной**;

- и законом сохранения механической энергии, а точнее его частным случаем, когда тела, составляющие замкнутую механическую систему тел, испытывают только абсолютно упругое взаимодействие: **кинетическая энергия замкнутой механической системы тел, испытывающих абсолютно упругое взаимодействие, для любого момента времени является величиной постоянной** (предполагая, что зависимость массы тела от скорости его движения не меняется при изменении потенциальной энергии тела).

Далее предположим, что масса **M(V)** материальной точки, движущейся со скоростью **V**, равна:

$$M(V) = M_o \cdot f(V) \qquad (60)$$

где: $\mathbf{M_o}$ – масса рассматриваемой материальной точки в состоянии покоя;

f(V) – функция, предположительно зависящая от величины скорости **V**.

Исходя из формулы (60) импульс **P(V)** материальной точки, движущейся со скоростью **V**, равен:

$$P(V) = M_o \cdot f(V) \cdot V \qquad (61)$$

А формула (61) позволяет записать следующее уравнение для кинетической энергии $\mathbf{E_к(V)}$ материальной точки, движущейся со скоростью **V**:

$$E_к(V) = M_o \cdot \int_0^V \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \qquad (62)$$

где: **f′ (V) –** производная функции **f (V)** .

Для определения зависимости функции **f (V)** от скорости **V** рассмотрим простейший пример.

2. Система уравнений для определения функции f (V)

Допустим, что имеются две инерциальные системы отсчета, аналогичные системам отсчета, изображенным на рис.1, неподвижная $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижная $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, которая бы двигалась со скоростью **V** параллельно оси $\mathbf{O_1x_1}$ относительно системы $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$.

Предположим, что имеется замкнутая механическая система тел, состоящая из тела 1 и тела 2, как показано на рис.3, имеющих массы в состоянии покоя, равные $\mathbf{M_{o1}}$ и $\mathbf{M_{o2}}$ соответственно.

В подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ тела 1 и тела 2 до некоторого момента времени $\mathbf{t_{2c}}$ двигались параллельно оси $\mathbf{O_2x_2}$ по одной линии с постоянными по величине скоростями $\mathbf{v_{21xн}}$ и $\mathbf{v_{22xн}}$ соответственно.

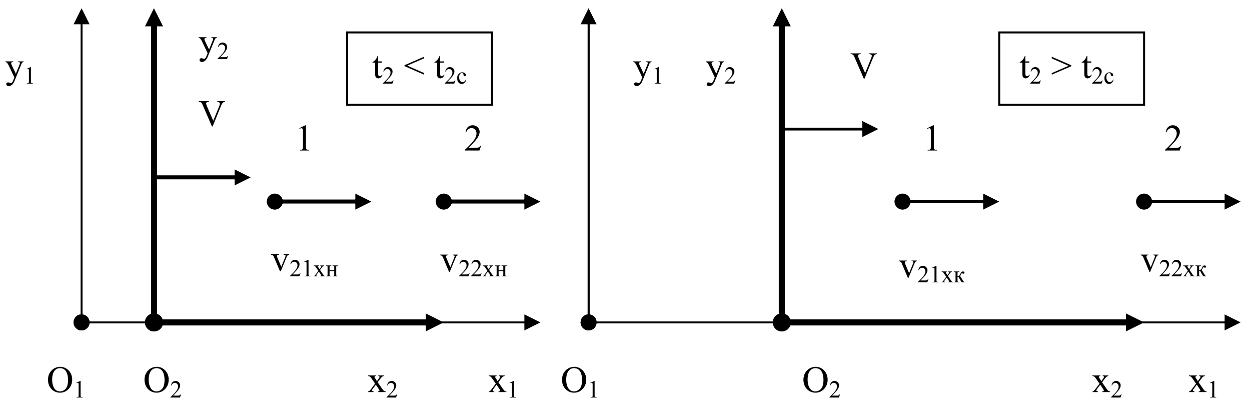

Рис. 3

В какой-то момент времени $\mathbf{t_{2c}}$ между телами 1 и 2 произошло абсолютно упругое прямое центральное столкновение.

Далее после столкновения в момент времени больший $\mathbf{t_{2c}}$ тела 1 и 2 двигаются параллельно оси $\mathbf{O_2x_2}$ по одной линии с постоянными по величине скоростями $\mathbf{v_{21xк}}$ и $\mathbf{v_{22xк}}$ соответственно.

Учитывая, что между телами 1 и 2 имело место прямое центральное столкновение и их можно рассматривать как материальные точки, запишем закон сохранения импульса для замкнутой механической системы тел 1 и 2 для моментов времени меньшего и большего чем $\mathbf{t_{2c}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

$$[M_{o1} \cdot f(V = v_{21хн}) \cdot v_{21хн}] + [M_{o2} \cdot f(V = v_{22хн}) \cdot v_{22хн}] = [M_{o1} \cdot f(V = v_{21хк}) \cdot v_{21хк}] + [M_{o2} \cdot f(V = v_{22хк}) \cdot v_{22хк}] \qquad (63)$$

А используя то, что столкновение тел 1 и 2 носило абсолютно упругий характер, можно записать закон сохранения кинетической энергии для замкнутой механической системы тел 1 и 2 для моментов времени меньшего и большего чем $\mathbf{t_{2c}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

$$\boldsymbol{\{}\, M_{o1} \cdot \int_0^{v_{21хн}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}\, M_{o2} \cdot \int_0^{v_{22хн}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} =$$

$$\boldsymbol{\{}\, M_{o1} \cdot \int_0^{v_{21хк}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}\, M_{o2} \cdot \int_0^{v_{22хк}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} \qquad (64)$$

Все ранее сказанное о движении тел 1 и 2 в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ можно сказать и о движении тел 1 и 2 в неподвижной системе отчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$, за исключением того, что столкновение между телами 1 и 2 происходит в момент времени $\mathbf{t_{1c}}$, соответствующий моменту времени $\mathbf{t_{2c}}$ в системе $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, тело 1 имеет соответственно до и после столкновения скорости $\mathbf{v_{11хн}}$ и $\mathbf{v_{11хк}}$, соответствующие скоростям $\mathbf{v_{21хн}}$ и $\mathbf{v_{21хк}}$, а тело 2 имеет соответственно до и после столкновения скорости $\mathbf{v_{12хн}}$ и $\mathbf{v_{12хк}}$, соответствующие скоростям $\mathbf{v_{22хн}}$ и $\mathbf{v_{22хк}}$.

Аналогично формулам (63) и (64) можно записать закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии для замкнутой механической системы тел 1 и 2 для моментов времени меньшего и большего чем $\mathbf{t_{1c}}$ в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

$$[M_{o1} \cdot f(V = v_{11хн}) \cdot v_{11хн}] + [M_{o2} \cdot f(V = v_{12хн}) \cdot v_{12хн}] = [M_{o1} \cdot f(V = v_{11хк}) \cdot v_{11хк}] + [M_{o2} \cdot f(V = v_{12хк}) \cdot v_{12хк}] \qquad (65)$$

$$\boldsymbol{\{}\, M_{o1} \cdot \int_0^{v_{11хн}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} + \boldsymbol{\{}\, M_{o2} \cdot \int_0^{v_{12хн}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \boldsymbol{\}} =$$

$$\{ M_{o1} \cdot \int_0^{v_{11xк}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{ M_{o2} \cdot \int_0^{v_{12xк}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} \quad (66)$$

В итоге применение законов сохранения импульса и кинетической энергии замкнутой механической системы тел 1 и 2 позволило записать четыре уравнения (63) -:- (66).

А используя формулу (8) к системе уравнений (63) -:- (66) можно добавить уранения связи проекций скоростей:

$$v_{11xн} = (v_{21xн} + V) / \{\{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{21xн}] / (\beta^2 \cdot V)\} + 1\} \quad (67)$$

$$v_{12xн} = (v_{22xн} + V) / \{\{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{22xн}] / (\beta^2 \cdot V)\} + 1\} \quad (68)$$

$$v_{11xк} = (v_{21xк} + V) / \{\{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{21xк}] / (\beta^2 \cdot V)\} + 1\} \quad (69)$$

$$v_{12xк} = (v_{22xк} + V) / \{\{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{22xк}] / (\beta^2 \cdot V)\} + 1\} \quad (70)$$

Таким образом получено восемь уравнений (63) -:- (70) с шестью неизвестными, одной неизвестной функцией и ее производной.

3. Формула массы движущегося тела при β ≥ 1

В случае, когда коэффициента перехода **β** определяется формулой (20)

$$\beta_>^{\ 2} = 1 / [1 - (V^2 / v_{xкр1}^{\ 2})] \quad (20)$$

единственной функцией, удовлетворяющей всем требованиям системы уравнений (63) -:- (70) является:

$$f(V)_> = 1 / [1 - (V^2 / v_{xкр1}^{\ 2})]^{1/2} \quad (71)$$

Тогда с учетом уравнений (60) -:- (62) можно записать зависимости для массы **M(V)**$_>$, импульса **P(V)**$_>$ и кинетической энергии **E$_к$(V)**$_>$ движущегося тела со скоростью **V** в случае, когда коэффициент перехода **β ≥ 1**:

$$M(V)_> = M_o / [1 - (V^2 / v_{xкр1}^{\ 2})]^{1/2} \quad (72)$$

$$P(V)_> = (M_o \cdot V) / [1 - (V^2 / v_{xкр1}^{\ 2})]^{1/2} \quad (73)$$

$$E_к(V)_> = M_o \cdot v_{xкр1}^{\ 2} \cdot \{\{1 / [1 - (V^2 / v_{xкр1}^{\ 2})]^{1/2}\} - 1\} \quad (74)$$

4. Формула массы движущегося тела при 0 < β < 1

В случае, когда коэффициента перехода **β** определяется формулой (21)

$$\beta_<^{\ 2} = 1 / [1 + (V^2 / v_{xкр2}^{\ 2})] \quad (21)$$

единственной функцией, удовлетворяющей всем требованиям системы уравнений (63) -:- (70) является:

$$f(V)_{<} = 1 / [1 + (V^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2} \qquad (75)$$

Тогда с учетом уравнений (60)-:-(62) можно записать зависимости для массы **M(V)<** , импульса **P(V)<** и кинетической энергии **$E_к$(V)<** движущегося тела со скоростью **V** в случае, когда коэффициент перехода **$0 < \beta < 1$**:

$$M(V)_{<} = M_o / [1 + (V^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2} \qquad (76)$$

$$P(V)_{<} = (M_o \cdot V) / [1 + (V^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2} \qquad (77)$$

$$E_к(V)_{<} = M_o \cdot v_{xкр2}^2 \cdot \{ 1 - \{1 / [1 + (V^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2}\}\} \qquad (78)$$

Зависимости (71)-:-(74) и (75)-:-(78) также являются взаимоисключающими, т.к. определены для взаимоисключающих диапазонов коэффициента перехода **β** (**$\beta \geq 1$** и **$0 < \beta < 1$**).

5. Пример для определения диапазона значений коэффициента перехода β , удовлетворяющих закон сохранения импульса

С целью определения диапазона (**$\beta \geq 1$** и **$0 < \beta < 1$**), в котором в действительности находятся значения коэффициента перехода **β** рассмотрим следующий пример.

Допустим, что имеются две инерциальные системы отсчета, аналогичные системам отсчета, изображенным на рис.1, неподвижная **$O_1x_1y_1z_1$** и подвижная **$O_2x_2y_2z_2$** , которая бы двигалась со скоростью **V** параллельно оси **O_1x_1** относительно системы **$O_1x_1y_1z_1$**.

Предположим, что имеется замкнутая механическая система тел, показанная на рис.4 и состоящая из точечных тела 1 и тела 2, имеющих равные массы **M_o** в состоянии покоя.

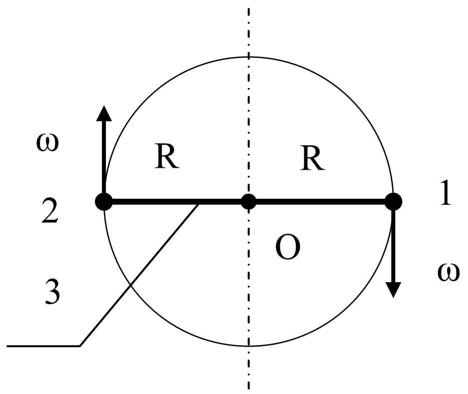

Рис. 4

Тела 1 и 2 соединены абсолютно жесткой (недеформируемой) нитью 3, не имеющей массы.

Тела 1 и 2 вращаются с угловой скоростью **ω** вокруг общего центра масс точки **O**. Расстояние от точечного тела 1 (тела 2) до точки **O** равно **R**.

Поместим рассматриваемую замкнутую систему тел 1 и 2 в подвижную систему отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ таким образом, чтобы точка **O** была бы неподвижна в этой системе и совпадала с началом координат $\mathbf{O_2}$, а вращение тел 1 и 2 вокруг нее происходило бы по часовой стрелке в плоскости $\mathbf{O_2x_2y_2}$, как показано на рис. 5.

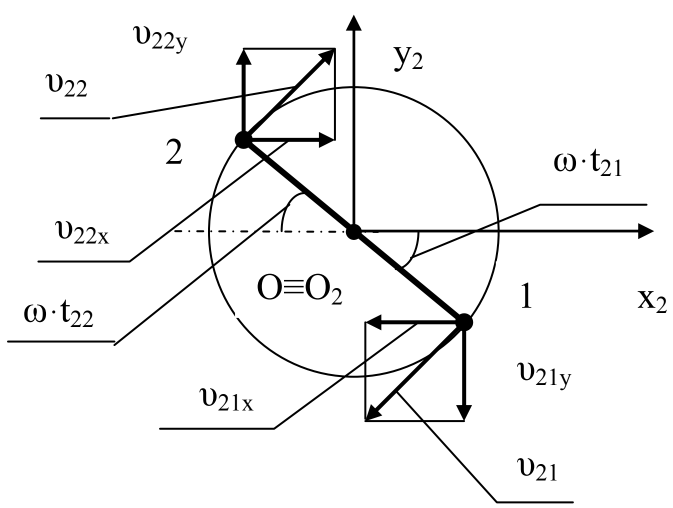

Рис. 5

Также допустим, что в момент начала отсчета времени ($\mathbf{t_2}$=0) в системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ тела 1 и 2 находились на оси $\mathbf{O_2x_2}$, причем тело 1 имело положительную координату, а тело 2 – отрицательную.

Опираясь на выше сказанное можно отметить, что в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ в любой момент времени $\mathbf{t_2}$ тела 1 и 2 будут иметь скорости $\boldsymbol{\upsilon_{21}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22}}$ соответственно равные:

$$\upsilon_{21} = \upsilon_{22} = \upsilon = \omega \cdot R \qquad (79)$$

При этом сумма квадратов проекций $\boldsymbol{\upsilon_{21x}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{21y}}$ скорости тела 1 и сумма квадратов проекций $\boldsymbol{\upsilon_{22x}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22y}}$ скорости тела 2 на оси $\mathbf{O_2x_2}$ и $\mathbf{O_2y_2}$ соответственно для моментов времени $\mathbf{t_{21}}$ и $\mathbf{t_{22}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ будут равны:

$$\upsilon_{21x}{}^2 + \upsilon_{21y}{}^2 = \upsilon_{22x}{}^2 + \upsilon_{22y}{}^2 = \upsilon^2 \qquad (80)$$

Используя формулу (6) можно отметить, что время $\mathbf{t_{11}}$ нахождения тела 1 в точке с координатами $\mathbf{x_{11}}$, $\mathbf{y_{11}}$, и $\mathbf{z_{11}}$ в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ будет связано следующим образом с временем $\mathbf{t_{21}}$ нахождения тела 1 в этой же точке с координатами $\mathbf{x_{21}}$, $\mathbf{y_{21}}$, и $\mathbf{z_{21}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

$$t_{11} = \{[(\beta^2 - 1) \cdot x_{21}] / (\beta \cdot V)\} + (\beta \cdot t_{21}) \qquad (81)$$

Аналогично используя формулу (6) можно отметить, что время $\mathbf{t_{12}}$ нахождения тела 2 в точке с координатами $\mathbf{x_{12}}$, $\mathbf{y_{12}}$, и $\mathbf{z_{12}}$ в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ будет связано следующим образом с временем $\mathbf{t_{22}}$ нахождения тела 2 в этой же точке с координатами $\mathbf{x_{22}}$, $\mathbf{y_{22}}$, и $\mathbf{z_{22}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

$$t_{12} = \{[(\beta^2 - 1) \cdot x_{22}] / (\beta \cdot V)\} + (\beta \cdot t_{22}) \qquad (82)$$

6. Момент времени t_{1p}

В рассматриваемом примере нас будет интересовать момент времени $\mathbf{t_{2p}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, при котором:

$$t_{21} = t_{22} = t_{2p} \qquad (83)$$

$$x_{21} = x_{22} \qquad (84)$$

и которому бы в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ соответствовал момент времени $\mathbf{t_{1p}}$, согласно уравнений (81)-:-(82) равный:

$t_{11} = t_{12} = t_{1p}$ (85)

Положение тел 1 и 2 в момент времени $\mathbf{t_{2p}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ изображено на рис. 6.

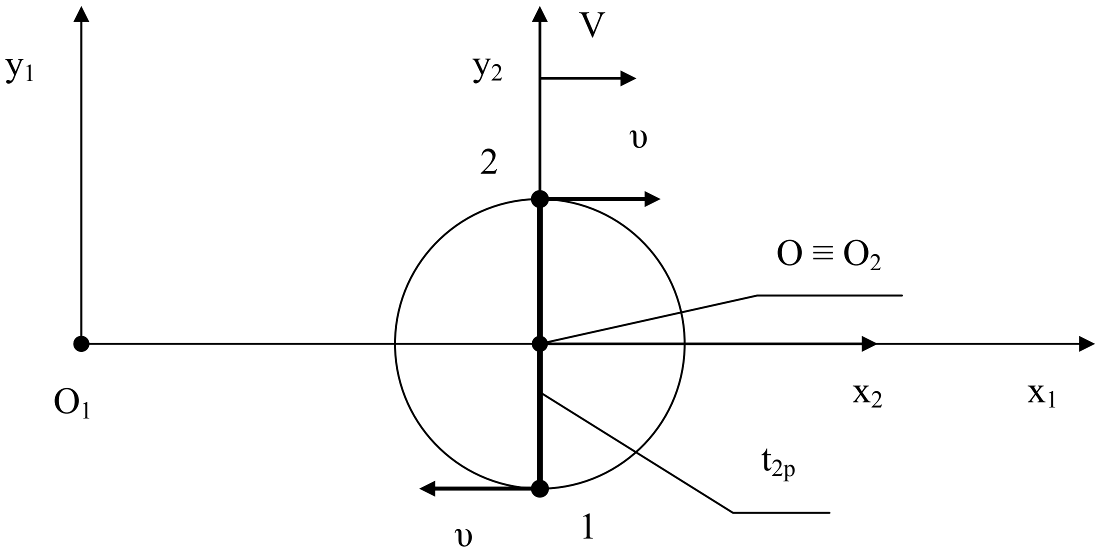

Рис. 6

В подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ в момент времени $\mathbf{t_{2p}}$ тело 1 и тело 2 соответственно имеет следующие значения проекций $\boldsymbol{\upsilon_{21xp}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{21yp}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22xp}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{22yp}}$ скоростей своего движения на оси $\mathbf{O_2x_2}$ и $\mathbf{O_2y_2}$:

$\upsilon_{21xp} = -\upsilon$ (86)

$\upsilon_{21yp} = 0$ (87)

$\upsilon_{22xp} = \upsilon$ (88)

$\upsilon_{22yp} = 0$ (89)

Тогда исходя из формул (8), (10) и (86)-:-(89), в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ в момент времени $\mathbf{t_{1p}}$ тело 1 и тело 2 соответственно будут иметь следующие значения проекций $\boldsymbol{\upsilon_{11xp}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{11yp}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{12xp}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{12yp}}$ скоростей своего движения на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$:

$\upsilon_{11xp} = (V - \upsilon) / \boldsymbol{\{}1 - \{[(\beta^2 - 1) \cdot \upsilon] / (\beta^2 \cdot V)\}\boldsymbol{\}}$ (90)

$\upsilon_{11yp} = 0$ (91)

$$\upsilon_{12xp} = (V + \upsilon) / \{\{[(\beta^2 - 1) \cdot \upsilon] / (\beta^2 \cdot V)\} + 1\} \quad (92)$$

$$\upsilon_{12yp} = 0 \quad (93)$$

Отсюда зная значения проекций скоростей движения тел 1 и 2 можно определить значения проекций $\mathbf{T_{1xp}}$ и $\mathbf{T_{1yp}}$ импульса системы тел 1 и 2 в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ в момент времени $\mathbf{t_{1p}}$:

$$T_{1xp} = (M_o \cdot \beta_{11xp} \cdot \upsilon_{11xp}) + (M_o \cdot \beta_{12xp} \cdot \upsilon_{12xp}) \quad (94)$$

$$T_{1yp} = 0 \quad (95)$$

где: $\boldsymbol{\beta_{11xp}}$ и $\boldsymbol{\beta_{12xp}}$ - коэффициенты перехода при скоростях, равных $\boldsymbol{\upsilon_{11xp}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{12xp}}$ соответственно.

7. Момент времени $t_{1т}$

В рассматриваемом примере нас будет также интересовать момент времени $\mathbf{t_{1т}}$ в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$, при котором:

$$t_{11} = t_{12} = t_{1т} \quad (96)$$

и тело 1 будет находиться на оси $\mathbf{O_1x_1}$.

Как показано на рис.7 положению тел 1 и 2 в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ в момент времени $\mathbf{t_{1т}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ будет соответствовать положение тела 1 в момент времени $\mathbf{t_{21т}}$ и положение тела 2 в момент времени $\mathbf{t_{22т}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$.

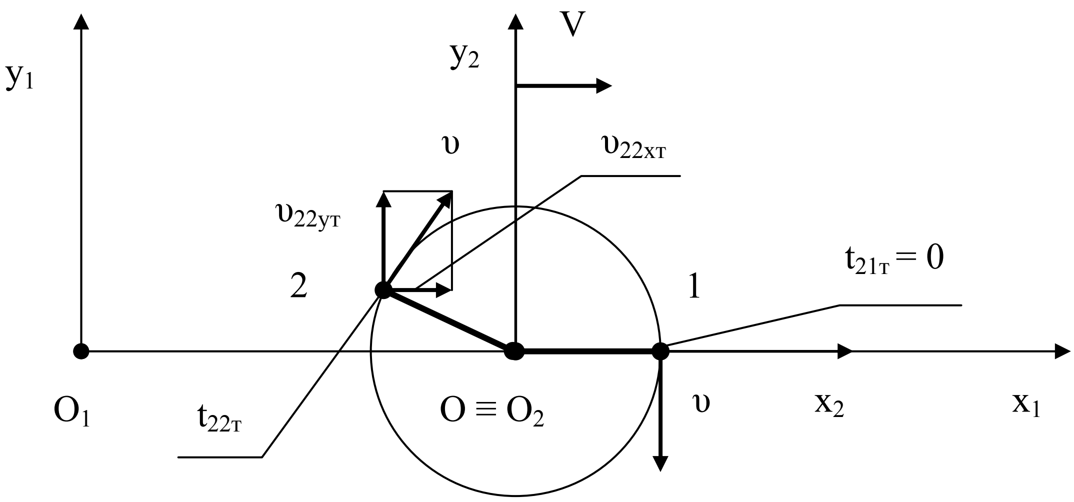

Рис. 7

Для упрощения рассмотрения примем, что:

$t_{21т} = 0$ (97)

Тогда из формул (81) и (82) получим, что:

$t_{11т} = \{[(\beta^2 - 1) \cdot x_{21т}] / (\beta \cdot V)\}$ (98)

$t_{12т} = \{[(\beta^2 - 1) \cdot x_{22т}] / (\beta \cdot V)\} + (\beta \cdot t_{22т})$ (99)

А с учетом формулы (96) можно записать:

$t_{22т} = \{[(\beta^2 - 1) \cdot (x_{21т} - x_{22т})] / (\beta^2 \cdot V)\}$ (100)

Как видно из уравнения (100) значение времени $\mathbf{t_{22т}}$ в зависимости от значения коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ может быть:

- $\mathbf{t_{22т}} > 0$ при $\boldsymbol{\beta > 1}$;
- $\mathbf{t_{22т}} < 0$ при $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$;
- $\mathbf{t_{22т}} = 0$ при $\boldsymbol{\beta = 1}$.

Таким образом получается, что в момент времени $\mathbf{t_{22т}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ тело 2 при значениях коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ $\boldsymbol{\beta > 1}$и $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$ не может находиться на оси $\mathbf{O_2x_2}$.

В подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ в момент времени $\mathbf{t_{21} = 0}$ тело 1 будут иметь следующие значения проекций $\boldsymbol{\upsilon_{21xт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{21yт}}$ скорости своего движения на оси $\mathbf{O_2x_2}$ и $\mathbf{O_2y_2}$:

$\upsilon_{21xт} = 0$ (101)

$\upsilon_{21yт} = -\upsilon$ (102)

Предположим, что в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ в момент времени $\mathbf{t_{22т}}$ тело 2 имеет проекции $\boldsymbol{\upsilon_{22xт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22yт}}$ скорости своего движения на оси $\mathbf{O_2x_2}$ и $\mathbf{O_2y_2}$.

Исходя из формул (8), (10) с учетом формул (101) и (102) в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ в момент времени $\mathbf{t_{1т}}$ тело 1 и тело 2 соответственно имеет следующие значения проекций $\boldsymbol{\upsilon_{11xт}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{11yт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{12xт}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{12yт}}$ скоростей своего движения на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$:

$\upsilon_{11xт} = V$ (103)

$\upsilon_{11yт} = -(\upsilon / \beta)$ (104)

$\upsilon_{12xт} = (V + \upsilon_{22xт}) / \boldsymbol{\{}\{[(\beta^2 - 1) \cdot \upsilon_{22xт}] / (\beta^2 \cdot V)\} + 1\boldsymbol{\}}$ (105)

$$\upsilon_{12ут} = \upsilon_{22ут} / \{\{[(\beta^2 - 1) \cdot \upsilon_{22хт}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\} \qquad (106)$$

Отсюда зная значения проекций скоростей движения тел 1 и 2 можно определить значения проекций $\mathbf{T_{1хт}}$ и $\mathbf{T_{1ут}}$ импульса системы тел 1 и 2 в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ в момент времени $\mathbf{t_{1т}}$:

$$T_{1хт} = (M_о \cdot \beta_{11т} \cdot V) + (M_о \cdot \beta_{12т} \cdot \upsilon_{12хт}) \qquad (107)$$

$$T_{1ут} = -[M_о \cdot \beta_{11т} \cdot (\upsilon / \beta)] + (M_о \cdot \beta_{12т} \cdot \upsilon_{12ут}) \qquad (108)$$

где: $\boldsymbol{\beta_{11т}}$ и $\boldsymbol{\beta_{12т}}$ - коэффициенты перехода при скоростях, равных $\boldsymbol{\upsilon_{11т}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{12т}}$ соответственно.

А квадраты скоростей $\boldsymbol{\upsilon_{11т}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{12т}}$ равны:

$$\upsilon_{11т}^2 = \upsilon_{11хт}^2 + \upsilon_{11ут}^2 = V^2 + (\upsilon / \beta)^2 \qquad (109)$$

$$\upsilon_{12т}^2 = \upsilon_{12хт}^2 + \upsilon_{12ут}^2 \qquad (110)$$

8. Система уравнений, полученная из закона сохранения импульса

В связи с тем, система тел 1 и 2 является замкнутой механической системой тел, можно отметить, что для выполнения закона сохранения импульса замкнутой системы тел 1 и 2 требуется, чтобы в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ импульсы (проекции импульсов) этой системы тел 1 и 2 в моменты времени $\mathbf{t_{1р}}$ и $\mathbf{t_{1т}}$ были бы равны, т.е.:

$$T_{1хр} = T_{1хт} \qquad (111)$$

$$T_{1ур} = T_{1ут} \qquad (112)$$

Или с учетом формул (94), (95), (107) и (108) формулы (111) и (112) можно записать:

$$(M_о \cdot \beta_{11хр} \cdot \upsilon_{11хр}) + (M_о \cdot \beta_{12хр} \cdot \upsilon_{12хр}) = (M_о \cdot \beta_{11т} \cdot V) + (M_о \cdot \beta_{12т} \cdot \upsilon_{12хт}) \qquad (113)$$

$$0 = -[M_о \cdot \beta_{11т} \cdot (\upsilon / \beta)] + (M_о \cdot \beta_{12т} \cdot \upsilon_{12ут}) \qquad (114)$$

где:

$$\upsilon_{11хр} = (V - \upsilon) / \{1 - \{[(\beta^2 - 1) \cdot \upsilon] / (\beta^2 \cdot V)\}\} \qquad (90)$$

$$\upsilon_{12хр} = (V + \upsilon) / \{\{[(\beta^2 - 1) \cdot \upsilon] / (\beta^2 \cdot V)\} + 1\} \qquad (92)$$

$$\upsilon_{12хт} = (V + \upsilon_{22хт}) / \{\{[(\beta^2 - 1) \cdot \upsilon_{22хт}] / (\beta^2 \cdot V)\} + 1\} \qquad (105)$$

$$\upsilon_{12ут} = \upsilon_{22ут} / \{\{[(\beta^2 - 1) \cdot \upsilon_{22хт}] / (\beta \cdot V)\} + \beta\} \qquad (106)$$

Сюда также можно добавить уравнения (109), (110) и (80):

$$\upsilon_{11т}{}^2 = \upsilon_{11хт}{}^2 + \upsilon_{11ут}{}^2 = V^2 + (\upsilon / \beta)^2 \qquad (109)$$

$$\upsilon_{12т}{}^2 = \upsilon_{12хт}{}^2 + \upsilon_{12ут}{}^2 \qquad (110)$$

$$\upsilon_{22хт}{}^2 + \upsilon_{22ут}{}^2 = \upsilon^2 \qquad (80)$$

Полученная система вышенаписанных уравнений (113), (114), (90), (92), (105), (106), (109), (110) и (80) позволяет определить значения проекций $\boldsymbol{\upsilon_{22хт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22ут}}$ скорости тела 2 в момент времени $\mathbf{t_{22т}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, при которых будет выполняться закон сохранения импульса замкнутой механической системы тел 1 и 2 в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$.

9. Значения проекций скорости $\upsilon_{22хт}$ и $\upsilon_{22ут}$ при нахождении коэффициента перехода β в диапазоне β ≥ 1

В случае, если значения коэфффициенты перехода **β** будут находиться в диапазоне **β ≥ 1**, воспользуемся формулой (20):

$$\beta_{>}{}^2 = 1 / [1 - (V^2 / v_{хкр1}{}^2)] \qquad (20)$$

Тогда с учетом формулы (20) коэфффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\beta_{11хр}}$, $\boldsymbol{\beta_{12хр}}$, $\boldsymbol{\beta_{11т}}$ и $\boldsymbol{\beta_{12т}}$ можно записать:

$$\beta = 1 / [1 - (V^2 / v_{хкр1}{}^2)]^{1/2} \qquad (115)$$

$$\beta_{11хр} = 1 / [1 - (\upsilon_{11хр}{}^2 / v_{хкр1}{}^2)]^{1/2} \qquad (116)$$

$$\beta_{12хр} = 1 / [1 - (\upsilon_{11хр}{}^2 / v_{хкр1}{}^2)]^{1/2} \qquad (117)$$

$$\beta_{11т} = 1 / \{1 - \{[V^2 + (\upsilon / \beta)^2] / v_{хкр1}{}^2\}\}^{1/2} \qquad (118)$$

$$\beta_{12т} = 1 / \{1 - [(\upsilon_{12хт}{}^2 + \upsilon_{12ут}{}^2) / v_{хкр1}{}^2]\}^{1/2} \qquad (119)$$

А с учетом формул (115)-:-(119) уравнения (113) и (114) примут вид:

$$\{(M_o \cdot \upsilon_{11хр}) / [1-(\upsilon_{11хр}{}^2/v_{хкр1}{}^2)]^{1/2}\} + \{(M_o \cdot \upsilon_{12хр}) / [1-(\upsilon_{12хр}{}^2/v_{хкр1}{}^2)]^{1/2}]\} = \{(M_o \cdot V) / \{1- [(V^2 + \{\upsilon^2 \cdot [1-(V^2/v_{хкр1}{}^2)]\}) / v_{хкр1}{}^2]\}^{1/2}\} + \{(M_o \cdot \upsilon_{12хт}) / \{1-[(\upsilon_{12хт}{}^2 + \upsilon_{12ут}{}^2) / v_{хкр1}{}^2]\}^{1/2}\} \qquad (120)$$

$$0 = -\{\{M_o \cdot \upsilon \cdot [1-(V^2/v_{хкр1}{}^2)]^{1/2}\} / \{1-[(V^2 + \{\upsilon^2 \cdot [1-(V^2/v_{хкр1}{}^2)]\}) / v_{хкр1}{}^2]\}^{1/2}\} + \{(M_o \cdot \upsilon_{12ут}) / \{1-[(\upsilon_{12хт}{}^2 + \upsilon_{12ут}{}^2) / v_{хкр1}{}^2]\}^{1/2}\} \qquad (121)$$

Формулы (90), (92) и (105)-:-(106), применяя формулу (115), можно записать:

$$\upsilon_{11хр} = (V - \upsilon) / \{1 - [(V \cdot \upsilon) / v_{хкр1}{}^2]\} \qquad (122)$$

$$\upsilon_{12xр} = (V + \upsilon) / \{1 + [(V \cdot \upsilon)/ v_{xкр1}^2]\} \qquad (123)$$

$$\upsilon_{12xт} = (V + \upsilon_{22xт}) / \{1 + [(V \cdot \upsilon_{22xт})/ v_{xкр1}^2]\} \qquad (124)$$

$$\upsilon_{12yт} = \{\upsilon_{22yт} \cdot [1 - (V^2/ v_{xкр1}^2)]^{1/2}\} / \{1 + [(V \cdot \upsilon_{22xт}) / v_{xкр1}^2]\} \qquad (125)$$

Вставив проекции скоростей $\boldsymbol{\upsilon_{11xр}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{12xр}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{12xт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{12yт}}$ из формул (122) -:-(125) в уравнения (120) и (121) и используя формулу (80) получим:

$$\{[M_o \cdot (V - \upsilon)] / \{[1 - (\upsilon^2/v_{xкр1}^2)]^{1/2} \cdot [1 - (V^2/v_{xкр1}^2)]^{1/2}\}\} + \{[M_o \cdot (V + \upsilon))] / \{[1 - (\upsilon^2/v_{xкр1}^2)]^{1/2} \cdot [1 - (V^2/v_{xкр1}^2)]^{1/2}\}\} = \{(M_o \cdot V) / \{[1 - (\upsilon^2/v_{xкр1}^2)]^{1/2} \cdot [1 - (V^2/v_{xкр1}^2)]^{1/2}\}\} + \{[M_o \cdot (V + \upsilon_{22xт})]/\{[1 - (\upsilon^2/v_{xкр1}^2)]^{1/2} \cdot [1 - (V^2/v_{xкр1}^2)]^{1/2}\}\} \qquad (126)$$

$$0 = - \{(M_o \cdot \upsilon) / [1 - (\upsilon^2/v_{xкр1}^2)]^{1/2}\} + \{(M_o \cdot \upsilon_{22yт}) / [1 - (\upsilon^2/v_{xкр1}^2)]^{1/2}\} \qquad (127)$$

После математических действий внутри формул формулы (126) и (127) превращаются в:

$$\upsilon_{22xт} = 0 \qquad (128)$$

$$\upsilon_{22yт} = \upsilon \qquad (129)$$

Уравнения (128) и (129) для случая, когда коэффициент перехода $\boldsymbol{\beta \geq 1}$ являются единственным условием, при котором в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ выполняется закон сохранения импульса замкнутой механической системы тел 1 и 2.

Также следует отметить, что значения проекций $\boldsymbol{\upsilon_{22xт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22yт}}$ скорости тела 2 не зависят от величины скорости $\mathbf{V}$.

10. Значения проекций скорости $\boldsymbol{\upsilon_{22xт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22yт}}$ при нахождении коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ в диапазоне $\mathbf{0 < \beta < 1}$

В случае, если значения коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ будут находиться в диапазоне $\mathbf{0 < \beta < 1}$, воспользуемся формулой (21):

$$\beta_<^{\,2} = 1 / [1 + (V^2 / v_{xкр2}^2)] \qquad (21)$$

Тогда с учетом формулы (21) коэффициенты перехода $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\beta_{11xр}}$, $\boldsymbol{\beta_{12xр}}$, $\boldsymbol{\beta_{11т}}$ и $\boldsymbol{\beta_{12т}}$ можно записать:

$$\beta = 1 / [1 + (V^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2} \qquad (130)$$

$$\beta_{11xр} = 1 / [1 + (\upsilon_{11xр}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2} \qquad (131)$$

$$\beta_{12xр} = 1 / [1 + (\upsilon_{11xр}^2 / v_{xкр2}^2)]^{1/2} \qquad (132)$$

$\beta_{11т}^2 = 1 / \{1 + \{[V^2 + (\upsilon / \beta)^2] / v_{хкр2}^2\}\}^{1/2}$ (133)

$\beta_{12т}^2 = 1 / \{1 + [(\upsilon_{12хт}^2 + \upsilon_{12ут}^2) / v_{хкр2}^2]\}^{1/2}$ (134)

А с учетом формул (130)-:-(134) уравнения (113) и (114) примут вид:

$$\{(M_o \cdot \upsilon_{11хр})/[1+(\upsilon_{11хр}^2/v_{хкр2}^2)]^{1/2}\}+\{(M_o \cdot \upsilon_{12хр})/[1+(\upsilon_{12хр}^2/v_{хкр2}^2)]^{1/2}\}=\{(M_o \cdot V)/\{1+[(V^2+\{\upsilon^2 \cdot [1+(V^2/v_{хкр2}^2)]\})/v_{хкр2}^2]\}^{1/2}\}+\{(M_o \cdot \upsilon_{12хт})/\{1+[(\upsilon_{12хт}^2+\upsilon_{12ут}^2)/v_{хкр2}^2]\}^{1/2}\} \quad (135)$$

$$0 = -\{\{M_o \cdot \upsilon \cdot [1 + (V^2/v_{хкр2}^2)]^{1/2}\} / \{1 + [(V^2 + \{\upsilon^2 \cdot [1+(V^2/v_{хкр2}^2)]\})/v_{хкр2}^2]\}^{1/2}\} + \{(M_o \cdot \upsilon_{12ут}) / \{1 + [(\upsilon_{12хт}^2 + \upsilon_{12ут}^2) / v_{хкр2}^2]\}^{1/2}\} \quad (136)$$

Формулы (90), (92) и (105)-:-(106), применяя формулу (130), можно записать:

$\upsilon_{11хр} = (V - \upsilon) / \{1 + [(V \cdot \upsilon)/v_{хкр2}^2]\}$ (137)

$\upsilon_{12хр} = (V + \upsilon) / \{1 - [(V \cdot \upsilon)/v_{хкр2}^2]\}$ (138)

$\upsilon_{12хт} = (V + \upsilon_{22хт}) / \{1 - [(V \cdot \upsilon_{22хт})/v_{хкр2}^2]\}$ (139)

$\upsilon_{12ут} = \{\upsilon_{22ут} \cdot [1 + (V^2/v_{хкр2}^2)]^{1/2}\} / \{1 - [(V \cdot \upsilon_{22хт}) / v_{хкр2}^2]\}$ (140)

Вставив проекции скоростей $\boldsymbol{\upsilon_{11хр}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{12хр}}$, $\boldsymbol{\upsilon_{12хт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{12ут}}$ из формул (137) -:-(140) в уравнения (135) и (136) и используя формулу (80) получим:

$$\{[M_o \cdot (V - \upsilon)] / \{[1 + (\upsilon^2/v_{хкр2}^2)]^{1/2} \cdot [1 + (V^2/v_{хкр2}^2)]^{1/2}\}\} + \{[M_o \cdot (V + \upsilon)] / \{[1 + (\upsilon^2/v_{хкр2}^2)]^{1/2} \cdot [1 + (V^2/v_{хкр2}^2)]^{1/2}\}\} = \{(M_o \cdot V) / \{[1 + (\upsilon^2/v_{хкр2}^2)]^{1/2} \cdot [1 + (V^2/v_{хкр2}^2)]^{1/2}\}\} + \{[M_o \cdot (V + \upsilon_{22хт})]/\{[1 + (\upsilon^2/v_{хкр2}^2)]^{1/2} \cdot [1 + (V^2/v_{хкр2}^2)]^{1/2}\}\} \quad (141)$$

$$0 = -\{(M_o \cdot \upsilon) / [1 + (\upsilon^2/v_{хкр2}^2)]^{1/2}\} + \{(M_o \cdot \upsilon_{22ут}) / [1 + (\upsilon^2/v_{хкр2}^2)]^{1/2}\} \quad (142)$$

После математических действий внутри формул формулы (141) и (142) превращаются в:

$\upsilon_{22хт} = 0$ (128)

$\upsilon_{22ут} = \upsilon$ (129)

Уравнения (128) и (129) для случая, когда коэффициент перехода $\mathbf{0 < \beta < 1}$ являются единственным условием, при котором в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ выполняется закон сохранения импульса замкнутой механической системы тел 1 и 2.

Здесь также следует отметить, что значения проекций $\boldsymbol{\upsilon_{22хт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22ут}}$ скорости тела 2 не зависят от величины скорости **V**.

11. Выводы

Уравнения (128) и (129) для значений коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ в диапазонах $\boldsymbol{\beta \geq 1}$ и $\mathbf{0 < \boldsymbol{\beta} < 1}$ являются единственным условием, при котором в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ выполняется закон сохранения импульса замкнутой механической системы тел 1 и 2.

Но с другой стороны, если тело 2 в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ в момент времени $\mathbf{t_{22т}}$ имеет проекции $\boldsymbol{\upsilon_{22xт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22yт}}$ скорости своего движения, равные:

$$\upsilon_{22xт} = 0 \qquad (128)$$

$$\upsilon_{22yт} = \upsilon \qquad (129)$$

то это означает, что тело 2 в момент времени $\mathbf{t_{22т}}$ находится на оси $\mathbf{O_2x_2}$ (естественно и на оси $\mathbf{O_1x_1}$), а это возможно лишь только в одном случае, если:

$$t_{22т} = t_{21т} = 0 \qquad (130)$$

Подставив уравнение (130) в формулу (100), учитывая, что $\mathbf{(x_{21т} - x_{22т}) \neq 0}$, получим:

$$0 = [1 - (1/\beta^2)] \qquad (131)$$

или:

$$\beta = 1 \qquad (132)$$

т.е. для выполнения закона сохранения импульса замкнутой механической системы тел 1 и 2 в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ требуется, чтобы коэффициенте перехода $\boldsymbol{\beta}$ был равным 1.

А это означает, что для значений коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ в диапазонах $\boldsymbol{\beta > 1}$ и $\mathbf{0 < \boldsymbol{\beta} < 1}$ закон сохранения импульса замкнутой механической системы тел 1 и 2 в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ не будет выполняться.

Отсюда можно сделать обобщающий вывод: **для выполнения закона сохранения импульса замкнутой механической системы тел в инерциальных системах отсчета требуется, чтобы коэффициента перехода β был равен 1:**

$$\boldsymbol{\beta = 1} \qquad (132)$$

Следовательно, в случае симметрии пространства и времени (однородности и изотропности пространства и однородности времени) связь между инерциальными системами отсчета неподвижной $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижной $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ будет выглядеть так:

$$x_1 = (x_2 + V \cdot t_2) \qquad (133)$$

$$x_2 = (x_1 - V \cdot t_1) \qquad (134)$$

$$y_1 = y_2 \qquad (3)$$

$$z_1 = z_2 \qquad (4)$$

т.е. преобразования Галилея будут верны при любых значениях скорости **V**.

12. Заключение

В заключение можно обобщить вышенаписанное.

1.Кинематика

Использование принципа относительности и симметрии пространства и времени позволило получить две взаимоисключающие равноправные зависимости коэффициента перехода **β** для инерциальных систем отсчета:

$$\beta_>^{\ 2} = 1 / [1 - (V^2 / v_{xкр1}^{\ 2})] \qquad (20)$$

$$\beta_<^{\ 2} = 1 / [1 + (V^2 / v_{xкр2}^{\ 2})] \qquad (21)$$

Динамика

Установлено, что необходимым условием выполнения закона сохранения импульса замкнутой механической системы тел в инерциальных системах является:

$$\beta = 1 \qquad (132)$$

P.S.: Основные идеи изложены в статье "Специальная теория относительности без постулата о постоянстве скорости света", напечатанной в журнале "Актуальные проблемы современной науки" (ISSN 1680-2721) № 1 (34) за 2007 год.

Автор В.Н. Кочетков

Статья "Краткие комментарии к специальной теории относительности" размещена 2 февраля 2007 года на сайте "Новые идеи и гипотезы" http://new-idea.kulichki.net/?mode=physics