

Рубрика: математическая физика.

Тематика: специальная теория относительности.

Кочетков Виктор Николаевич

главный специалист ФГУП «Центр эксплуатации объектов
наземной космической инфраструктуры» (ФГУП «ЦЭНКИ»)

КОММЕНТАРИИ К СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В данной статье делается попытка рассмотрения специальной теории относительности в общем виде без использования постулата об инвариантности скорости света.

1. Основные уравнения специальной теории относительности

Исходя из принципа относительности, симметрии пространства и времени (однородности и изотропности пространства и однородности времени), соотношения между координатами и временем одного и того же события в двух инерциальных системах отсчета неподвижной $O_1x_1y_1z_1$ и подвижной $O_2x_2y_2z_2$ при условии, что:

- сходные оси декартовых координат систем $O_1x_1y_1z_1$ и $O_2x_2y_2z_2$ попарно параллельны и одинаково направлены;

- система $O_2x_2y_2z_2$, движется относительно системы $O_1x_1y_1z_1$ с постоянной скоростью V относительно оси Ox_1 (как показано на рис.1);

- в качестве начала отсчета времени ($t_1=0$ и $t_2=0$) в обеих системах выбран тот момент, когда начала координат O_1 и O_2 этих систем совпадают;

могут быть записаны следующим образом:

$$x_1 = \beta \cdot (x_2 + V \cdot t_2) \quad (1)$$

$$x_2 = \beta \cdot (x_1 - V \cdot t_1) \quad (2)$$

$$y_1 = y_2 \quad (3)$$

$$z_1 = z_2 \quad (4)$$

где: x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 – координаты точки A в системах отсчета $O_1x_1y_1z_1$ и $O_2x_2y_2z_2$ соответственно;

t_1 и t_2 - значения времени в системах отсчета $O_1x_1y_1z_1$ и $O_2x_2y_2z_2$ соответственно;

β - коэффициент перехода, являющийся предположительно функцией скорости V .

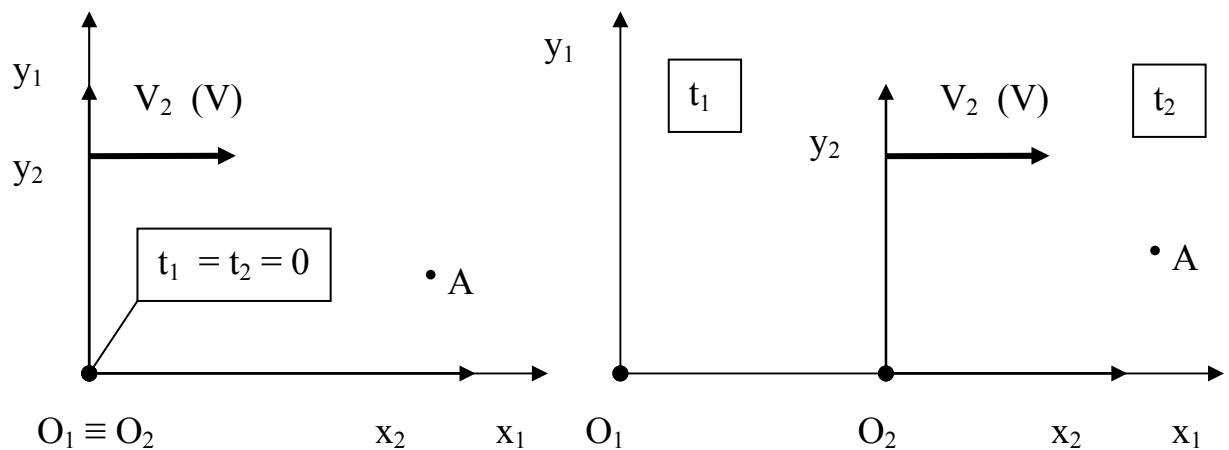


Рис. 1

Из формул (1) и (2) можно записать зависимость для значений времен t_1 и t_2 :

$$t_1 = \{[(\beta^2 - 1) \cdot x_2] / (\beta \cdot V)\} + (\beta \cdot t_2) \quad (5)$$

$$t_2 = \{[(1 - \beta^2) \cdot x_1] / (\beta \cdot V)\} + (\beta \cdot t_1) \quad (6)$$

Про коэффициент перехода β в формулах (1) и (2) можно сказать следующее:

- коэффициент перехода β будет равен 1 при $V = 0$;
- коэффициент перехода β будет равен 1, если коэффициент перехода β не будет зависеть от величины скорости V ;
- при принятом направлении оси декартовых координат систем $O_1x_1y_1z_1$ и $O_2x_2y_2z_2$ коэффициент перехода β будет больше 0, так как отрицательные значения коэффициент перехода β будет иметь при разной направленности осей Ox_1 и O_2x_2 ;

- при значении коэффициента перехода $\beta > 1$ линейный размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, уменьшается в направлении движения и ход времени часов, движущихся относительно инерциальной системы отсчета, замедляется;

- при значении коэффициента перехода $0 < \beta < 1$ линейный размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, увеличивается в направлении движения и ход времени часов, движущихся относительно инерциальной системы отсчета, ускоряется.

Используя формулы (1) -:- (6) может быть получена связь между проекциями v_{x2} , v_{y2} и v_{z2} скорости движения точки **A** в подвижной системе $O_2x_2y_2z_2$ на оси декартовых координат и аналогичными проекциями v_{x1} , v_{y1} и v_{z1} скорости этой точки **A** в неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$:

$$v_{x1} = (v_{x2} + V) / \{ \{ [(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta^2 \cdot V) \} + 1 \} \quad (7)$$

$$v_{x2} = (v_{x1} - V) / \{ \{ [(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta^2 \cdot V) \} + 1 \} \quad (8)$$

$$v_{y1} = v_{y2} / \{ \{ [(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta \cdot V) \} + \beta \} \quad (9)$$

$$v_{y2} = v_{y1} / \{ \{ [(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta \cdot V) \} + \beta \} \quad (10)$$

$$v_{z1} = v_{z2} / \{ \{ [(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta \cdot V) \} + \beta \} \quad (11)$$

$$v_{z2} = v_{z1} / \{ \{ [(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta \cdot V) \} + \beta \} \quad (12)$$

А из формул (5) -:- (12) может быть получена связь между проекциями a_{x2} , a_{y2} и a_{z2} ускорения точки **A** в подвижной системе $O_2x_2y_2z_2$ на оси декартовых координат и аналогичными проекциями a_{x1} , a_{y1} и a_{z1} ускорения этой точки **A** в неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$:

$$a_{x1} = (a_{x2} \cdot \beta^{-3}) / \{ \{ [(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta^2 \cdot V) \} + 1 \}^3 \quad (13)$$

$$a_{x2} = (a_{x1} \cdot \beta^{-3}) / \{ \{ [(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta^2 \cdot V) \} + 1 \}^3 \quad (14)$$

$$a_{y1} = \frac{(a_{y2} \cdot \{ \{ [(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta \cdot V) \} + \beta \}) - \{ [(\beta^2 - 1) \cdot v_{y2} \cdot a_{x2}] / (\beta \cdot V) \}}{\{ \{ [(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta \cdot V) \} + \beta \}^3} \quad (15)$$

$$a_{y2} = \frac{(a_{y1} \cdot \{ \{ [(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta \cdot V) \} + \beta \}) - \{ [(1 - \beta^2) \cdot v_{y1} \cdot a_{x1}] / (\beta \cdot V) \}}{\{ \{ [(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta \cdot V) \} + \beta \}^3} \quad (16)$$

$$a_{z1} = \frac{(a_{z2} \cdot \{ \{ [(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta \cdot V) \} + \beta \}) - \{ [(\beta^2 - 1) \cdot v_{z2} \cdot a_{x2}] / (\beta \cdot V) \}}{\{ \{ [(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta \cdot V) \} + \beta \}^3} \quad (17)$$

$$a_{z2} = \frac{\{[(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}] / (\beta \cdot V)\} + \beta^3}{\{[(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta \cdot V)\} + \beta^3} - \frac{\{[(1 - \beta^2) \cdot v_{z1} \cdot a_{x1}] / (\beta \cdot V)\}}{\{[(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}] / (\beta \cdot V)\} + \beta^3} \quad (18)$$

2. Определение особой скорости

Допустим, что существует такое значение $V_{\text{хкр}}$ проекции v_{x1} скорости движения точки \mathbf{A} в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O}_1x_1y_1z_1$, которому бы соответствовала значение проекции v_{x2} скорости движения точки \mathbf{A} в подвижной системе отсчета $\mathbf{O}_2x_2y_2z_2$, равное $V_{\text{хкр}}$, т.е. когда:

$$v_{x1} = v_{x2} = V_{\text{хкр}} \quad (19)$$

Подставив значение (19) в формулу (7) или (8), получим:

$$V_{\text{хкр}}^2 = (\beta^2 \cdot V^2) / (\beta^2 - 1) \quad (20)$$

В случае если коэффициент перехода β имеет значение $\beta > 1$, получим, что $V_{\text{хкр}1}$ будет иметь действительное значение:

$$V_{\text{хкр}1} = v_{\text{хкр}1} = \pm (\beta \cdot V) / (\beta^2 - 1)^{1/2} \quad (21)$$

где: $v_{\text{хкр}1}$ - действительная величина, имеющая размерность скорости.

А в случае если коэффициент перехода β имеет значение $0 < \beta < 1$, получим, что $V_{\text{хкр}2}$ будет иметь мнимое значение:

$$V_{\text{хкр}2} = i \cdot v_{\text{хкр}2} = \pm (i \cdot \beta \cdot V) / (1 - \beta^2)^{1/2} \quad (22)$$

где: $v_{\text{хкр}2}$ - действительная величина, имеющая размерность скорости.

Из формулы (20) можно получить, что:

$$\beta^2 = 1 / [1 - (V^2 / V_{\text{хкр}}^2)] \quad (23)$$

Тогда из формулы (23) с учетом формулы (21) для коэффициента перехода β , имеющего значения $\beta > 1$ и который обозначим как $\beta_>$, можно записать:

$$\beta_>^2 = 1 / [1 - (V^2 / v_{\text{хкр}1}^2)] \quad (24)$$

А из формулы (23) с учетом формулы (22) для коэффициента перехода β , имеющего значения $0 < \beta < 1$ и который обозначим как $\beta_<$, можно записать:

$$\beta_<^2 = 1 / [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)] \quad (25)$$

3. Уравнение связи для коэффициентов перехода

Рассмотрим три инерциальные системы отсчета неподвижной $\mathbf{O}_1x_1y_1z_1$ и подвижные $\mathbf{O}_2x_2y_2z_2$, и $\mathbf{O}_3x_3y_3z_3$, показанные на рис.2 и у которых:

- сходные оси декартовых координат систем $\mathbf{O}_1x_1y_1z_1$, $\mathbf{O}_2x_2y_2z_2$ и $\mathbf{O}_3x_3y_3z_3$ попарно параллельны и одинаково направлены;

- система $\mathbf{O}_2x_2y_2z_2$, движется относительно системы $\mathbf{O}_1x_1y_1z_1$ с постоянной скоростью V_2 относительно оси \mathbf{Ox}_1 ;

- система $\mathbf{O}_3x_3y_3z_3$, движется относительно системы $\mathbf{O}_1x_1y_1z_1$ с постоянной скоростью V_3 относительно оси \mathbf{Ox}_1 ;

- в качестве начала отсчета времени ($t_1=0$, $t_2=0$ и $t_3=0$) в этих трех системах выбран тот момент, когда их начала координат \mathbf{O}_1 , \mathbf{O}_2 и \mathbf{O}_3 совпадают.

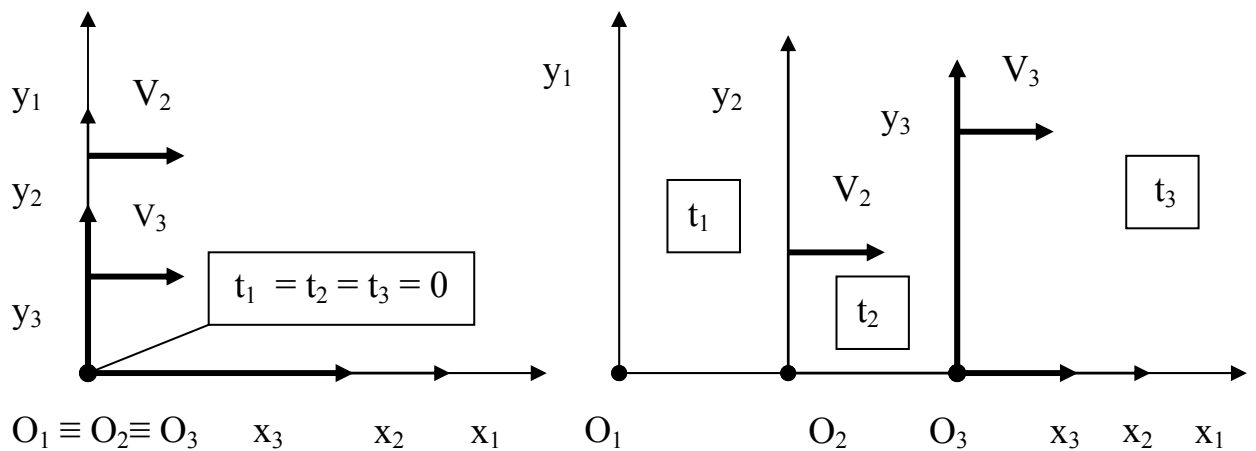


Рис. 2

Опираясь на формулу (8) можно определить значение скорости V_{23} движения точки \mathbf{O}_3 относительно точки \mathbf{O}_2 :

$$V_{23} = (V_3 - V_2) / \{ \{ [(1 - \beta_2^2) \cdot V_3] / (\beta_2^2 \cdot V_2) \} + 1 \} \quad (26)$$

и значение скорости V_{32} движения точки \mathbf{O}_2 относительно точки \mathbf{O}_3 :

$$V_{32} = (V_2 - V_3) / \{ \{ [(1 - \beta_3^2) \cdot V_2] / (\beta_3^2 \cdot V_3) \} + 1 \} \quad (27)$$

где: β_2 и β_3 - коэффициенты перехода для инерциальных систем отсчета, движущихся относительно неподвижной системы отсчета со

скоростью V_2 и V_3 соответственно.

Используя принцип относительности, согласно которому точка O_3 будет удаляться относительно точки O_2 со скоростью, равной по абсолютной величине и противоположно направленной скорости, с которой точка O_2 удаляется относительно точки O_3 , т.е.:

$$V_{32} = - V_{23} \quad (28)$$

Подставив уравнение (28) в формулы (26) и (27) получим:

$$\{(1 - \beta_2^2) \cdot V_3\} / (\beta_2^2 \cdot V_2) + 1 = \{(1 - \beta_3^2) \cdot V_2\} / (\beta_3^2 \cdot V_3) + 1 \quad (29)$$

Отсюда уравнение для коэффициентов перехода β_2 и β_3 запишется следующим образом:

$$\beta_3^2 = (\beta_2^2 \cdot V_2) / [V_3^2 - (\beta_2^2 \cdot V_3) + (\beta_2^2 \cdot V_2)] \quad (30)$$

4. Получение зависимостей для коэффициентов перехода

Из уравнения (29) можно получить формулу:

$$(\beta_2^2 - 1) / (\beta_2^2 \cdot V_2^2) = (\beta_3^2 - 1) / (\beta_3^2 \cdot V_3^2) \quad (31)$$

Так как величины коэффициентов перехода β_2 и β_3 не зависят друг от друга, а зависят только от величин скоростей V_2 и V_3 соответственно, и величины скоростей V_2 и V_3 задавались произвольно (также не зависят друг от друга), то можно сказать, что:

$$(\beta_2^2 - 1) / (\beta_2^2 \cdot V_2^2) = (\beta_3^2 - 1) / (\beta_3^2 \cdot V_3^2) = \text{Const} \quad (32)$$

т.е. получается в общем виде, что:

$$(\beta^2 - 1) / (\beta^2 \cdot V^2) = \text{Const} \quad (33)$$

При величине коэффициента перехода $\beta > 1$, если посмотреть по внимательнее на формулу (31), формула (33) примет вид:

$$(\beta_{>}^2 - 1) / (\beta_{>}^2 \cdot V^2) = K_{>} \quad (34)$$

где: $K_{>}$ - положительная постоянная величина, независящая от величины скорости V и величины коэффициента перехода β (в диапазоне значений $\beta > 1$);

$\beta_{>}$ - коэффициент перехода β , значения которого находятся в диапазоне значений $\beta > 1$.

При величине коэффициента перехода $0 < \beta < 1$, опираясь на формулу (31), формула (33) запишется:

$$(\beta_{<}^2 - 1) / (\beta_{<}^2 \cdot V^2) = K_{<} \quad (35)$$

где: $K_{<}$ - отрицательная постоянная величина, независящая от величины скорости V и величины коэффициента перехода β (в диапазоне значений $0 < \beta < 1$);

$\beta_{<}$ - коэффициент перехода β , значения которого находятся в диапазоне значений $0 < \beta < 1$.

Формулу (34) можно переписать в виде:

$$\beta_{>}^2 = 1 / [1 - (K_{>} \cdot V^2)] \quad (36)$$

А формулу (35) в виде:

$$\beta_{<}^2 = 1 / [1 - (K_{<} \cdot V^2)] \quad (37)$$

Если вернуться к формулам (24) и (25):

$$\beta_{>}^2 = 1 / [1 - (V^2 / v_{\text{хкр}1}^2)] \quad (24)$$

$$\beta_{<}^2 = 1 / [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)] \quad (25)$$

и сравнивая их с формулами (36) и (37), то можно отметить, что:

$$K_{>} = 1 / v_{\text{хкр}1}^2 \quad (38)$$

$$K_{<} = - (1 / v_{\text{хкр}2}^2) \quad (39)$$

А учитывая, что $K_{>}$ и $K_{<}$ являются постоянными величинами, независящими от величины скорости V перемещения подвижной системы отсчета $O_2x_2y_2z_2$ относительно покоящейся системы $O_1x_1y_1z_1$, можно сделать следующий вывод:

что $v_{\text{хкр}1}$ и $v_{\text{хкр}2}$ тоже являются постоянными величинами, не зависящими от величины скорости V , т.е.:

$$v_{\text{хкр}1} = \text{Const} \quad (40)$$

$$v_{\text{хкр}2} = \text{Const} \quad (41)$$

Одним словом:

- при $\beta > 1$ существует величина скорости $v_{\text{хкр}1}$ движения точки, которая была бы инвариантна во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета,

- при $0 < \beta < 1$ мнимая величина скорости $V_{\text{хкр}2}$ движения точки инвариантна во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета.

5. Основные уравнения специальной теории относительности при $\beta > 1$

Подставив формулу (24) в уравнения (1), (2) и (5) :- (18), получим следующую систему уравнений при коэффициенте перехода $\beta = \beta_>$:

$$x_{1>} = [x_{2>} + (V \cdot t_{2>})] / [1 - (V^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \quad (42)$$

$$x_{2>} = [x_{1>} - (V \cdot t_{1>})] / [1 - (V^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \quad (43)$$

$$t_{1>} = \{t_{2>} + [(V \cdot x_{2>}) / v_{\text{хкр}1}^2]\} / [(1 - V^2/v_{\text{хкр}1}^2)^{1/2}] \quad (44)$$

$$t_{2>} = \{t_{1>} - [(V \cdot x_{1>}) / v_{\text{хкр}1}^2]\} / [(1 - V^2/v_{\text{хкр}1}^2)^{1/2}] \quad (45)$$

$$v_{x1>} = (v_{x2>} + V) / \{1 + [(V \cdot v_{x2>}) / v_{\text{хкр}1}^2]\} \quad (46)$$

$$v_{x2>} = (v_{x1>} - V) / \{1 - [(V \cdot v_{x1>}) / v_{\text{хкр}1}^2]\} \quad (47)$$

$$v_{y1>} = \{v_{y2>} \cdot [1 - (V^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2}\} / \{1 + [(V \cdot v_{x2>}) / v_{\text{хкр}1}^2]\} \quad (48)$$

$$v_{y2>} = \{v_{y1>} \cdot [1 - (V^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2}\} / \{1 - [(V \cdot v_{x1>}) / v_{\text{хкр}1}^2]\} \quad (49)$$

$$v_{z1>} = \{v_{z2>} \cdot [1 - (V^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2}\} / \{1 + [(V \cdot v_{x2>}) / v_{\text{хкр}1}^2]\} \quad (50)$$

$$v_{z2>} = \{v_{z1>} \cdot [1 - (V^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2}\} / \{1 - [(V \cdot v_{x1>}) / v_{\text{хкр}1}^2]\} \quad (51)$$

$$a_{x1>} = \{a_{x2>} \cdot [1 - (V^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{3/2}\} / \{1 + [(V \cdot v_{x2>}) / v_{\text{хкр}1}^2]\}^3 \quad (52)$$

$$a_{x2>} = \{a_{x1>} \cdot [1 - (V^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{3/2}\} / \{1 - [(V \cdot v_{x1>}) / v_{\text{хкр}1}^2]\}^3 \quad (53)$$

$$a_{y1>} = \frac{[\{1 + [(V \cdot v_{x2>}) / v_{\text{хкр}1}^2]\} \cdot a_{y2>}] - [(V \cdot v_{y2>} \cdot a_{x2>}) / v_{\text{хкр}1}^2] J \cdot [1 - (V^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]}{\{1 + [(V \cdot v_{x2>}) / v_{\text{хкр}1}^2]\}^3} \quad (54)$$

$$a_{y2>} = \frac{[\{1 - [(V \cdot v_{x1>}) / v_{\text{хкр}1}^2]\} \cdot a_{y1>}] + [(V \cdot v_{y1>} \cdot a_{x1>}) / v_{\text{хкр}1}^2] J \cdot [1 - (V^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]}{\{1 - [(V \cdot v_{x1>}) / v_{\text{хкр}1}^2]\}^3} \quad (55)$$

$$a_{z1>} = \frac{[\{1 + [(V \cdot v_{x2>}) / v_{\text{хкр}1}^2]\} \cdot a_{z2>}] - [(V \cdot v_{z2>} \cdot a_{x2>}) / v_{\text{хкр}1}^2] J \cdot [1 - (V^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]}{\{1 + [(V \cdot v_{x2>}) / v_{\text{хкр}1}^2]\}^3} \quad (56)$$

$$a_{z2>} = \frac{[\{1 - [(V \cdot v_{x1>}) / v_{\text{хкр}1}^2]\} \cdot a_{z1>}] + [(V \cdot v_{z1>} \cdot a_{x1>}) / v_{\text{хкр}1}^2] J \cdot [1 - (V^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]}{\{1 - [(V \cdot v_{x1>}) / v_{\text{хкр}1}^2]\}^3} \quad (57)$$

6. Основные уравнения специальной теории относительности

при $0 < \beta < 1$

Подставив формулу (25) в уравнения (1), (2) и (5) :- (18), получим систему уравнений для случая когда коэффициент перехода $\beta = \beta_<$:

$$x_{1<} = [x_{2<} + (V \cdot t_{2<})] / [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2} \quad (58)$$

$$x_{2<} = [x_{1<} - (V \cdot t_{1<})] / [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2} \quad (59)$$

$$t_{1<} = \{t_{2<} - [(V \cdot x_{2<}) / v_{\text{хкр}2}^2]\} / [(1 + V^2/v_{\text{хкр}2}^2)^{1/2}] \quad (60)$$

$$t_{2<} = \{t_{1<} + [(V \cdot x_{1<}) / v_{\text{хкр}2}^2]\} / [(1 + V^2/v_{\text{хкр}2}^2)^{1/2}] \quad (61)$$

$$v_{x1<} = (v_{x2<} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{x2<}) / v_{\text{хкр}2}^2]\} \quad (62)$$

$$v_{x2<} = (v_{x1<} - V) / \{1 + [(V \cdot v_{x1<}) / v_{\text{хкр}2}^2]\} \quad (63)$$

$$v_{y1<} = \{v_{y2<} \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} / \{1 - [(V \cdot v_{x2<}) / v_{\text{хкр}2}^2]\} \quad (64)$$

$$v_{y2<} = \{v_{y1<} \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} / \{1 + [(V \cdot v_{x1<}) / v_{\text{хкр}2}^2]\} \quad (65)$$

$$v_{z1<} = \{v_{z2<} \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} / \{1 - [(V \cdot v_{x2<}) / v_{\text{хкр}2}^2]\} \quad (66)$$

$$v_{z2<} = \{v_{z1<} \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} / \{1 + [(V \cdot v_{x1<}) / v_{\text{хкр}2}^2]\} \quad (67)$$

$$a_{x1<} = \{a_{x2<} \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{3/2}\} / \{1 - [(V \cdot v_{x2<}) / v_{\text{хкр}2}^2]\}^3 \quad (68)$$

$$a_{x2<} = \{a_{x1<} \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{3/2}\} / \{1 + [(V \cdot v_{x1<}) / v_{\text{хкр}2}^2]\}^3 \quad (69)$$

$$a_{y1<} = \frac{[\{1 - [(V \cdot v_{x2<}) / v_{\text{хкр}2}^2]\} \cdot a_{y2<}] + [(V \cdot v_{y2<} \cdot a_{x2<}) / v_{\text{хкр}2}^2] \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]}{\{1 - [(V \cdot v_{x2<}) / v_{\text{хкр}2}^2]\}^3} \quad (70)$$

$$a_{y2<} = \frac{[\{1 + [(V \cdot v_{x1<}) / v_{\text{хкр}2}^2]\} \cdot a_{y1<}] - [(V \cdot v_{y1<} \cdot a_{x1<}) / v_{\text{хкр}2}^2] \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]}{\{1 + [(V \cdot v_{x1<}) / v_{\text{хкр}2}^2]\}^3} \quad (71)$$

$$a_{z1<} = \frac{[\{1 - [(V \cdot v_{x2<}) / v_{\text{хкр}2}^2]\} \cdot a_{z2<}] + [(V \cdot v_{z2<} \cdot a_{x2<}) / v_{\text{хкр}2}^2] \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]}{\{1 - [(V \cdot v_{x2<}) / v_{\text{хкр}2}^2]\}^3} \quad (72)$$

$$a_{z2<} = \frac{[\{1 + [(V \cdot v_{x1<}) / v_{\text{хкр}2}^2]\} \cdot a_{z1<}] - [(V \cdot v_{z1<} \cdot a_{x1<}) / v_{\text{хкр}2}^2] \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]}{\{1 + [(V \cdot v_{x1<}) / v_{\text{хкр}2}^2]\}^3} \quad (73)$$

7. Системы уравнений для определения зависимости

массы движущегося тела от скорости

Воспользуемся принципом относительности, утверждающим, что физические законы инвариантны по отношению к выбору инерциальной системы отсчета, т.е. уравнения, выражающие эти законы, имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета.

Для определения зависимости массы движущегося тела от его скорости перемещения воспользуемся:

- законом сохранения импульса: **импульс замкнутой (на которую не действуют внешние силы) механической системы тел для любого момента времени является величиной постоянной;**

- и законом сохранения механической энергии, а точнее его частным случаем, когда тела, составляющие замкнутую механическую систему тел, испытывают только абсолютно упругое взаимодействие: **кинетическая энергия замкнутой механической системы тел, испытывающих абсолютно упругое взаимодействие, для любого момента времени является величиной постоянной.**

Далее предположим, что масса $M(V)$ материальной точки, движущейся со скоростью V , равна:

$$M(V) = M_0 \cdot f(V) \quad (74)$$

где: M_0 – масса рассматриваемой материальной точки в состоянии покоя;

$f(V)$ – функция, предположительно зависящая от величины скорости V .

Исходя из формулы (74) импульс $P(V)$ материальной точки, движущейся со скоростью V , равен:

$$P(V) = M_0 \cdot f(V) \cdot V \quad (75)$$

А формула (75) позволяет записать следующее уравнение для кинетической энергии $E_k(V)$ материальной точки, движущейся со скоростью V :

$$E_k(V) = M_0 \cdot \int_0^V \{ [f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2] \} \cdot dV \quad (76)$$

где: $\dot{f}(V)$ – производная функции $f(V)$.

С целью написания системы уравнений, позволяющих определить значение функции $f(\mathbf{V})$, рассмотрим два простейших примера.

Пример № 1

Допустим, что имеются две инерциальные системы отсчета, аналогичные системам отсчета, изображенным на рис.1, неподвижная $O_1x_1y_1z_1$ и подвижная $O_2x_2y_2z_2$, которая бы двигалась со скоростью \mathbf{V} параллельно оси O_1x_1 относительно системы $O_1x_1y_1z_1$.

Предположим, что имеется замкнутая механическая система тел, состоящая из тела 1 и тела 2, как показано на рис.3, имеющих массы в состоянии покоя, равные M_{o1} и M_{o2} соответственно.

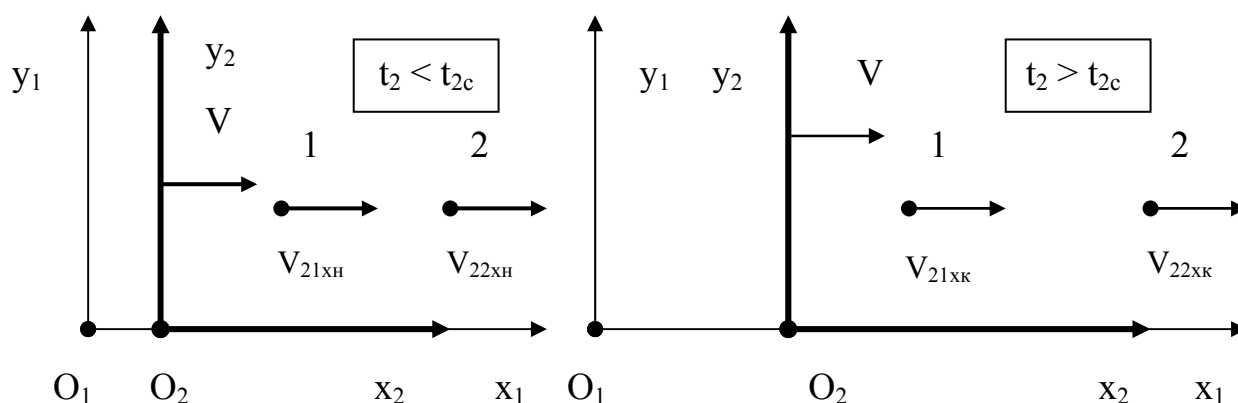


Рис. 3

В подвижной системе отсчета $O_2x_2y_2z_2$ тела 1 и тела 2 до некоторого момента времени t_{2c} двигались параллельно оси O_2x_2 по одной линии с постоянными по величине скоростями v_{21xH} и v_{22xH} соответственно.

В какой-то момент времени t_{2c} между телами 1 и 2 произошло абсолютно упругое прямое центральное столкновение.

Далее после столкновения в момент времени больший t_{2c} тела 1 и 2 двигаются параллельно оси O_2x_2 по одной линии с постоянными по величине скоростями v_{21xK} и v_{22xK} соответственно.

Учитывая, что между телами 1 и 2 имело место прямое центральное

столкновение и их можно рассматривать как материальные точки, запишем закон сохранения импульса для замкнутой механической системы тел 1 и 2 для моментов времени меньшего и большего чем t_{2c} в подвижной системе отсчета $O_2x_2y_2z_2$:

$$[M_{01} \cdot f(V=v_{21xH}) \cdot v_{21xH}] + [M_{02} \cdot f(V=v_{22xH}) \cdot v_{22xH}] = [M_{01} \cdot f(V=v_{21xK}) \cdot v_{21xK}] + [M_{02} \cdot f(V=v_{22xK}) \cdot v_{22xK}] \quad (77)$$

А используя то, что столкновение тел 1 и 2 носило абсолютно упругий характер, можно записать закон сохранения кинетической энергии для замкнутой механической системы тел 1 и 2 для моментов времени меньшего и большего чем t_{2c} в подвижной системе отсчета $O_2x_2y_2z_2$:

$$\left\{ M_{01} \cdot \int_0^{v_{21xH}} \{ [f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2] \} \cdot dV \right\} + \left\{ M_{02} \cdot \int_0^{v_{22xH}} \{ [f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2] \} \cdot dV \right\} = \left\{ M_{01} \cdot \int_0^{v_{21xK}} \{ [f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2] \} \cdot dV \right\} + \left\{ M_{02} \cdot \int_0^{v_{22xK}} \{ [f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2] \} \cdot dV \right\} \quad (78)$$

Все ранее сказанное о движении тел 1 и 2 в подвижной системе отсчета $O_2x_2y_2z_2$ можно сказать и о движении тел 1 и 2 в неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$, за исключением того, что столкновение между телами 1 и 2 происходит в момент времени t_{1c} , соответствующий моменту времени t_{2c} в системе $O_2x_2y_2z_2$, тело 1 имеет соответственно до и после столкновения скорости v_{11xH} и v_{11xK} , соответствующие скоростям v_{21xH} и v_{21xK} , а тело 2 имеет соответственно до и после столкновения скорости v_{12xH} и v_{12xK} , соответствующие скоростям v_{22xH} и v_{22xK} .

Аналогично формулам (77) и (78) можно записать закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии для замкнутой механической системы тел 1 и 2 для моментов времени меньшего и большего чем t_{1c} в неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$:

$$[M_{01} \cdot f(V=v_{11xH}) \cdot v_{11xH}] + [M_{02} \cdot f(V=v_{12xH}) \cdot v_{12xH}] = [M_{01} \cdot f(V=v_{11xK}) \cdot v_{11xK}] + [M_{02} \cdot f(V=v_{12xK}) \cdot v_{12xK}] \quad (79)$$

$$\left\{ M_{01} \cdot \int_0^{v_{11xH}} \{ [f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2] \} \cdot dV \right\} + \left\{ M_{02} \cdot \int_0^{v_{12xH}} \{ [f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2] \} \cdot dV \right\} =$$

$$\{M_{o1} \cdot \int_0^{V_{11кк}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{V_{12кк}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} \quad (80)$$

Пример № 2

Пример № 2 аналогичен примеру № 1 и отличается только тем, как показано на рис. 4, что в подвижной системе отсчета $O_2x_2y_2z_2$ тела 1 и тела 2 двигаются не параллельно оси O_2x_2 , а параллельно оси O_2y_2 .

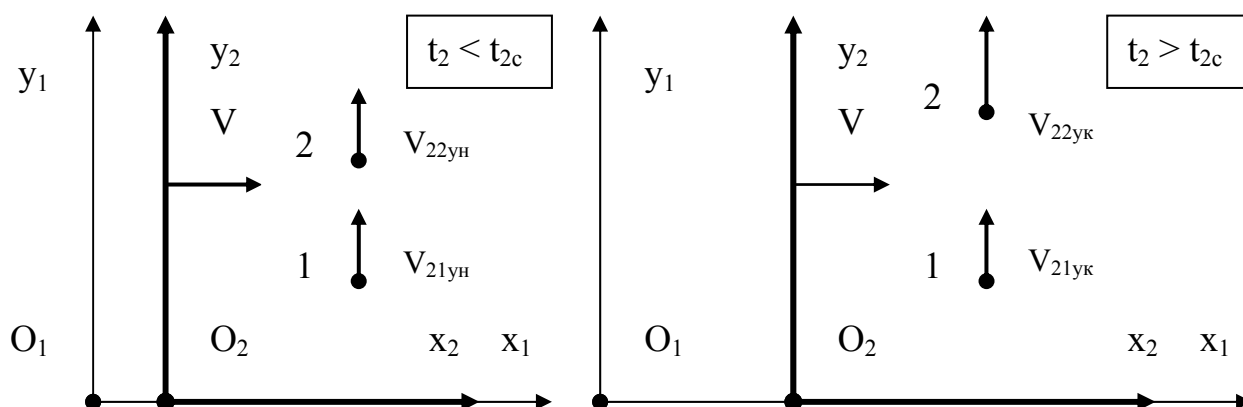


Рис. 4

В подвижной системе отсчета $O_2x_2y_2z_2$ тела 1 и тела 2 до некоторого момента времени t_{2c} двигались параллельно оси O_2y_2 по одной линии с постоянными по величине скоростями v_{21yh} и v_{22yh} соответственно.

После столкновения в момент времени больший t_{2c} тела 1 и 2 двигаются параллельно оси O_2y_2 по одной линии с постоянными по величине скоростями v_{21yk} и v_{22yk} соответственно.

Тогда можно записать закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии для замкнутой механической системы тел 1 и 2 для моментов времени меньшего и большего чем t_{2c} в подвижной системе отсчета $O_2x_2y_2z_2$:

$$[M_{o1} \cdot f(V = v_{21yh}) \cdot v_{21yh}] + [M_{o2} \cdot f(V = v_{22yh}) \cdot v_{22yh}] = [M_{o1} \cdot f(V = v_{21yk}) \cdot v_{21yk}] + [M_{o2} \cdot f(V = v_{22yk}) \cdot v_{22yk}] \quad (81)$$

$$\begin{aligned} & \{M_{o1} \cdot \int_0^{V_{21yh}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{V_{22yh}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} = \\ & \{M_{o1} \cdot \int_0^{V_{21yk}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{V_{22yk}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} \quad (82) \end{aligned}$$

Аналогично можно записать закон сохранения импульса (два уравнения для проекций импульса на оси $\mathbf{O}_1\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{O}_1\mathbf{y}_1$) и закон сохранения кинетической энергии для замкнутой механической системы тел 1 и 2 для моментов времени меньшего и большего чем t_{1c} в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O}_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1\mathbf{z}_1$:

$$\begin{aligned} & \{M_{o1} \cdot f[V = (v_{11yh}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} + \{M_{o2} \cdot f[V = (v_{12yh}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} = \\ & \{M_{o1} \cdot f[V = (v_{11yk}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} + \{M_{o2} \cdot f[V = (v_{12yk}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} \quad (83) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{M_{o1} \cdot f[V = (v_{11yh}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{11yh}\} + \{M_{o2} \cdot f[V = (v_{12yh}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{12yh}\} = \\ & \{M_{o1} \cdot f[V = (v_{11yk}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{11yk}\} + \{M_{o2} \cdot f[V = (v_{12yk}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{12yk}\} \quad (84) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{M_{o1} \cdot \int_0^{(v_{11yh}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{(v_{12yh}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} = \\ & \{M_{o1} \cdot \int_0^{(v_{11yk}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{(v_{12yk}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} \quad (85) \end{aligned}$$

8. Формула массы движущегося тела при $\beta > 1$

С целью определения зависимости для массы движущегося тела при значении коэффициента перехода $\beta = \beta_>$ (т.е. $\beta > 1$) составим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & [M_{o1} \cdot f(V = v_{21xh}) \cdot v_{21xh}] + [M_{o2} \cdot f(V = v_{22xh}) \cdot v_{22xh}] = [M_{o1} \cdot f(V = v_{21xk}) \cdot v_{21xk}] + \\ & [M_{o2} \cdot f(V = v_{22xk}) \cdot v_{22xk}] \quad (77) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{M_{o1} \cdot \int_0^{V_{21xh}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{V_{22xh}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} = \\ & \{M_{o1} \cdot \int_0^{V_{21xk}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{V_{22xk}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} \quad (78) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [M_{o1} \cdot f(V = v_{11xh}) \cdot v_{11xh}] + [M_{o2} \cdot f(V = v_{12xh}) \cdot v_{12xh}] = [M_{o1} \cdot f(V = v_{11xk}) \cdot v_{11xk}] + \\ & [M_{o2} \cdot f(V = v_{12xk}) \cdot v_{12xk}] \quad (79) \end{aligned}$$

$$\{M_{o1} \cdot \int_0^{V_{11xH}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{V_{12xH}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} =$$

$$\{M_{o1} \cdot \int_0^{V_{11xK}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{V_{12xK}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} \quad (80)$$

$$[M_{o1} \cdot f(V = v_{21yH}) \cdot v_{21yH}] + [M_{o2} \cdot f(V = v_{22yH}) \cdot v_{22yH}] = [M_{o1} \cdot f(V = v_{21yK}) \cdot v_{21yK}] + [M_{o2} \cdot f(V = v_{22yK}) \cdot v_{22yK}] \quad (81)$$

$$\{M_{o1} \cdot \int_0^{V_{21yH}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{V_{22yH}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} =$$

$$\{M_{o1} \cdot \int_0^{V_{21yK}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{V_{22yK}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} \quad (82)$$

$$\{M_{o1} \cdot f[V = (v_{11yH}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} + \{M_{o2} \cdot f[V = (v_{12yH}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} =$$

$$\{M_{o1} \cdot f[V = (v_{11yK}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} + \{M_{o2} \cdot f[V = (v_{12yK}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} \quad (83)$$

$$\{M_{o1} \cdot f[V = (v_{11yH}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{11yH}\} + \{M_{o2} \cdot f[V = (v_{12yH}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{12yH}\} =$$

$$\{M_{o1} \cdot f[V = (v_{11yK}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{11yK}\} + \{M_{o2} \cdot f[V = (v_{12yK}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{12yK}\} \quad (84)$$

$$\{M_{o1} \cdot \int_0^{(v_{11yH}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{(v_{12yH}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} =$$

$$\{M_{o1} \cdot \int_0^{(v_{11yK}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{o2} \cdot \int_0^{(v_{12yK}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} \quad (85)$$

В эту систему уравнений нужно также добавить уравнения связи между проекциями скоростей тел 1 и 2 в подвижной $\mathbf{O}_2x_2y_2z_2$ и неподвижной $\mathbf{O}_1x_1y_1z_1$ системах отсчета, записанные исходя из формул (46) и (48):

$$v_{11xH} = (v_{21xH} + V) / \{1 + [(V \cdot v_{21xH}) / v_{xkp1}^2]\} \quad (86)$$

$$v_{12xH} = (v_{22xH} + V) / \{1 + [(V \cdot v_{22xH}) / v_{xkp1}^2]\} \quad (87)$$

$$v_{11xK} = (v_{21xK} + V) / \{1 + [(V \cdot v_{21xK}) / v_{xkp1}^2]\} \quad (88)$$

$$v_{12xK} = (v_{22xK} + V) / \{1 + [(V \cdot v_{22xK}) / v_{xkp1}^2]\} \quad (89)$$

$$v_{11yH} = v_{21yH} \cdot [1 - (V^2 / v_{xkp1}^2)]^{1/2} \quad (90)$$

$$v_{12yH} = v_{22yH} \cdot [1 - (V^2 / v_{xkp1}^2)]^{1/2} \quad (91)$$

$$v_{11yK} = v_{21yK} \cdot [1 - (V^2 / v_{xkp1}^2)]^{1/2} \quad (92)$$

$$v_{12yK} = v_{22yK} \cdot [1 - (V^2 / v_{xkp1}^2)]^{1/2} \quad (93)$$

Для рассмотрения имеется 17 уравнений, 12 неизвестных значения и

одна неизвестная функция.

Единственной функцией способной удовлетворить всем требованиям 17 уравнений является:

$$f(V)_{>} = 1 / [1 - (V^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \quad (94)$$

Тогда с учетом уравнений (74) -:- (76) можно записать зависимости для массы $M(V)_{>}$, импульса $P(V)_{>}$ и кинетической энергии $E_k(V)_{>}$ движущегося тела со скоростью V в случае, когда коэффициент перехода $\beta > 1$:

$$M(V)_{>} = M_0 / [1 - (V^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \quad (95)$$

$$P(V)_{>} = (M_0 \cdot V) / [1 - (V^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \quad (96)$$

$$E_k(V)_{>} = M_0 \cdot v_{\text{хкр}1}^2 \cdot \{ \{ 1 / [1 - (V^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} - 1 \} \quad (97)$$

9. Проверка правильности выбора формулы (94) при $\beta > 1$

(для примеров № 1 и № 2)

С начала перепишем формулы (77)-:-(93) с учетом формул (95)-:-(97):

$$\{ (M_{01} \cdot v_{21\text{хн}}) / [1 - (v_{21\text{хн}}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} + \{ (M_{02} \cdot v_{22\text{хн}}) / [1 - (v_{22\text{хн}}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} = \\ \{ (M_{01} \cdot v_{21\text{хк}}) / [1 - (v_{21\text{хк}}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} + \{ (M_{02} \cdot v_{22\text{хк}}) / [1 - (v_{22\text{хк}}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} \quad (98)$$

$$\{ M_{01} / [1 - (v_{21\text{хн}}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} + \{ M_{02} / [1 - (v_{22\text{хн}}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} = \\ \{ M_{01} / [1 - (v_{21\text{хк}}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} + \{ M_{02} / [1 - (v_{22\text{хк}}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} \quad (99)$$

$$\{ (M_{01} \cdot v_{11\text{хн}}) / [1 - (v_{11\text{хн}}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} + \{ (M_{02} \cdot v_{12\text{хн}}) / [1 - (v_{12\text{хн}}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} = \\ \{ (M_{01} \cdot v_{11\text{хк}}) / [1 - (v_{11\text{хк}}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} + \{ (M_{02} \cdot v_{12\text{хк}}) / [1 - (v_{12\text{хк}}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} \quad (100)$$

$$\{ M_{01} / [1 - (v_{11\text{хн}}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} + \{ M_{02} / [1 - (v_{12\text{хн}}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} = \\ \{ M_{01} / [1 - (v_{11\text{хк}}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} + \{ M_{02} / [1 - (v_{12\text{хк}}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} \quad (101)$$

$$\{ (M_{01} \cdot v_{21\text{yh}}) / [1 - (v_{21\text{yh}}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} + \{ (M_{02} \cdot v_{22\text{yh}}) / [1 - (v_{22\text{yh}}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} = \\ \{ (M_{01} \cdot v_{21\text{yk}}) / [1 - (v_{21\text{yk}}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} + \{ (M_{02} \cdot v_{22\text{yk}}) / [1 - (v_{22\text{yk}}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} \quad (102)$$

$$\{ M_{01} / [1 - (v_{21\text{yh}}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} + \{ M_{02} / [1 - (v_{22\text{yh}}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} = \\ \{ M_{01} / [1 - (v_{21\text{yk}}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} + \{ M_{02} / [1 - (v_{22\text{yk}}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} \quad (103)$$

$$\{ (M_{01} \cdot V) / \{ 1 - [(v_{11\text{yh}}^2 + V^2) / v_{\text{хкр}1}^2] \}^{1/2} \} + \{ (M_{02} \cdot V) / \{ 1 - [(v_{12\text{yh}}^2 + V^2) / v_{\text{хкр}1}^2] \}^{1/2} \} = \\ \{ (M_{01} \cdot V) / \{ 1 - [(v_{11\text{yk}}^2 + V^2) / v_{\text{хкр}1}^2] \}^{1/2} \} + \{ (M_{02} \cdot V) / \{ 1 - [(v_{12\text{yk}}^2 + V^2) / v_{\text{хкр}1}^2] \}^{1/2} \} \quad (104)$$

$$\{ (M_{01} \cdot v_{11\text{yh}}) / \{ 1 - [(v_{11\text{yh}}^2 + V^2) / v_{\text{хкр}1}^2] \}^{1/2} \} + \{ (M_{02} \cdot v_{12\text{yh}}) / \{ 1 - [(v_{12\text{yh}}^2 + V^2) / v_{\text{хкр}1}^2] \}^{1/2} \} = \\ \{ (M_{01} \cdot v_{11\text{yk}}) / \{ 1 - [(v_{11\text{yk}}^2 + V^2) / v_{\text{хкр}1}^2] \}^{1/2} \} + \{ (M_{02} \cdot v_{12\text{yk}}) / \{ 1 - [(v_{12\text{yk}}^2 + V^2) / v_{\text{хкр}1}^2] \}^{1/2} \} \quad (105)$$

$$\{M_{o1} / \{1 - [(v_{11yH}^2 + V^2) / v_{xkp1}^2]\}^{1/2}\} + \{M_{o2} / \{1 - [(v_{12yH}^2 + V^2) / v_{xkp1}^2]\}^{1/2}\} = \\ \{M_{o1} / \{1 - [(v_{11yK}^2 + V^2) / v_{xkp1}^2]\}^{1/2}\} + \{M_{o2} / \{1 - [(v_{12yK}^2 + V^2) / v_{xkp1}^2]\}^{1/2}\} \quad (106)$$

Где:

$$v_{11xH} = (v_{21xH} + V) / \{1 + [(V \cdot v_{21xH}) / v_{xkp1}^2]\} \quad (86)$$

$$v_{12xH} = (v_{22xH} + V) / \{1 + [(V \cdot v_{22xH}) / v_{xkp1}^2]\} \quad (87)$$

$$v_{11xK} = (v_{21xK} + V) / \{1 + [(V \cdot v_{21xK}) / v_{xkp1}^2]\} \quad (88)$$

$$v_{12xK} = (v_{22xK} + V) / \{1 + [(V \cdot v_{22xK}) / v_{xkp1}^2]\} \quad (89)$$

$$v_{11yH} = v_{21yH} \cdot [1 - (V^2 / v_{xkp1}^2)]^{1/2} \quad (90)$$

$$v_{12yH} = v_{22yH} \cdot [1 - (V^2 / v_{xkp1}^2)]^{1/2} \quad (91)$$

$$v_{11yK} = v_{21yK} \cdot [1 - (V^2 / v_{xkp1}^2)]^{1/2} \quad (92)$$

$$v_{12yK} = v_{22yK} \cdot [1 - (V^2 / v_{xkp1}^2)]^{1/2} \quad (93)$$

Предположим, что $M_{o1} = 1$, $M_{o2} = 0,5$, $V / v_{xkp1} = 0,5$, $v_{21xH} / v_{xkp1} = v_{21yH} / v_{xkp1} = 0,9$, $v_{22xH} / v_{xkp1} = v_{22yH} / v_{xkp1} = 0,6$.

Тогда числовые расчеты дают следующие результаты для примера № 1:

I) в подвижной системе отсчета $O_2x_2y_2z_2$:

1) тело 1 имело:

а) до столкновения скорость $v_{21xH} / v_{xkp1} = 0,9$, массу $M_{21H} = 2,294157338706$, импульс $P_{21H} / v_{xkp1} = 2,064741604835$, кинетическую энергию $E_{k21H} / v_{xkp1}^2 = 1,294157338706$;

б) после столкновения $v_{21xK} / v_{xkp1} = 0,7360143377$, $M_{21K} = 1,477179174242$, $P_{21K} / v_{xkp1} = 1,087225051595$, $E_{k21K} / v_{xkp1}^2 = 0,477179174242$;

2) тело 2 имело:

а) до столкновения $v_{22xH} / v_{xkp1} = 0,6$, $M_{22H} = 0,625$, $P_{22H} / v_{xkp1} = 0,375$, $E_{k22H} / v_{xkp1}^2 = 0,125$;

б) после столкновения $v_{22xK} / v_{xkp1} = 0,937959108239$, $M_{22K} = 1,441978164463$, $P_{22K} / v_{xkp1} = 1,35251655324$, $E_{k22K} / v_{xkp1}^2 = 0,941978164463$;

3) система тел 1 и 2 имело:

а) до столкновения массу $(M_{21H} + M_{22H}) = 2,919157338706$, импульс $(P_{21H} + P_{22H}) / v_{xkp1} = 2,439741604835$, кинетическую энергию $(E_{k21H} + E_{k22H}) / v_{xkp1}^2 = 1,419157338706$;

б) после столкновения массу $(M_{21к} + M_{22к}) = 2,919157338706$, импульс $(P_{21к} + P_{22к}) / v_{хкр1} = 2,439741604835$, кинетическую энергию $(E_{к21к} + E_{к22к}) / v_{хкр1}^2 = 1,419157338706$;

II) в неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$:

1) тело 1 имело:

а) до столкновения $v_{11хн} / v_{хкр1} = 0,965517241379$, массу $M_{11н} = 3,841143835489$, импульс $P_{11н} / v_{хкр1} = 3,708690599782$, кинетическую энергию $E_{к11н} / v_{хкр1}^2 = 2,841143835489$;

б) после столкновения $v_{11хк} / v_{хкр1} = 0,903514517939$, $M_{11к} = 2,333409263988$, $P_{11к} / v_{хкр1} = 2,108269146306$, $E_{к11к} / v_{хкр1}^2 = 1,333409263988$;

2) тело 2 имело:

а) до столкновения $v_{12хн} / v_{хкр1} = 0,846153846154$, $M_{12н} = 0,938194187433$, $P_{12н} / v_{хкр1} = 0,793856620136$, $E_{к12н} / v_{хкр1}^2 = 0,438194187433$;

б) после столкновения $v_{12хк} / v_{хкр1} = 0,978882996844$, $M_{12к} = 2,445928758933$, $P_{12к} / v_{хкр1} = 2,394278073612$, $E_{к12к} / v_{хкр1}^2 = 1,945928758933$;

3) система тел 1 и 2 имело:

а) до столкновения массу $(M_{11н} + M_{12н}) = 4,779338022922$, импульс $(P_{11н} + P_{12н}) / v_{хкр1} = 4,502547219918$, кинетическую энергию $(E_{к11н} + E_{к12н}) / v_{хкр1}^2 = 3,279338022922$;

б) после столкновения массу $(M_{11к} + M_{12к}) = 4,779338022922$, импульс $(P_{11к} + P_{12к}) / v_{хкр1} = 4,502547219918$, кинетическую энергию $(E_{к11к} + E_{к12к}) / v_{хкр1}^2 = 3,279338022922$.

Для примера № 2 числовые расчеты дают следующие результаты:

I) в подвижной системе отсчета $O_2x_2y_2z_2$:

1) тело 1 имело:

а) до столкновения скорость $v_{21ун} / v_{хкр1} = 0,9$, массу $M_{21н} = 2,294157338706$, импульс $P_{21н} / v_{хкр1} = 2,064741604835$, кинетическую энергию $E_{к21н} / v_{хкр1}^2 = 1,294157338706$;

б) после столкновения $v_{21ук} / v_{хкр1} = 0,7360143377$, $M_{21к} = 1,477179174242$, $P_{21к} / v_{хкр1} = 1,087225051595$, $E_{к21к} / v_{хкр1}^2 = 0,477179174242$;

2) тело 2 имело:

а) до столкновения $v_{22уh} / v_{хкр1} = 0,6$, $M_{22h} = 0,625$, $P_{22h} / v_{хкр1} = 0,375$,
 $E_{к22h} / v_{хкр1}^2 = 0,125$;

б) после столкновения $v_{22уk} / v_{хкр1} = 0,937959108239$, $M_{22k} = 1,441978164463$,
 $P_{22k} / v_{хкр1} = 1,35251655324$, $E_{к22k} / v_{хкр1}^2 = 0,941978164463$;

3) система тел 1 и 2 имело:

а) до столкновения массу $(M_{21h} + M_{22h}) = 2,919157338706$, импульс
 $(P_{21h} + P_{22h}) / v_{хкр1} = 2,439741604835$, кинетическую энергию
 $(E_{к21h} + E_{к22h}) / v_{хкр1}^2 = 1,419157338706$;

б) после столкновения массу $(M_{21k} + M_{22k}) = 2,919157338706$, импульс
 $(P_{21k} + P_{22k}) / v_{хкр1} = 2,439741604835$, кинетическую энергию
 $(E_{к21k} + E_{к22k}) / v_{хкр1}^2 = 1,419157338706$;

II) в неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$:

1) тело 1 имело:

а) до столкновения $v_{11хh} / v_{хкр1} = 0,5$, $v_{11уh} / v_{хкр1} = 0,779422863406$, массу
 $M_{11h} = 2,64906471413$, проекции импульса $P_{11хh} / v_{хкр1} = 1,324532357065$ и
 $P_{11уh} / v_{хкр1} = 2,064741604835$, кинетическую энергию
 $E_{к11h} / v_{хкр1}^2 = 1,64906471413$;

б) после столкновения $v_{11хk} / v_{хкр1} = 0,5$, $v_{11уk} / v_{хкр1} = 0,637407113998$,
 $M_{11k} = 1,70569958778$, $P_{11хk} / v_{хкр1} = 0,85284979389$,
 $P_{11уk} / v_{хкр1} = 1,087225051595$, $E_{к11k} / v_{хкр1}^2 = 0,70569958778$;

2) тело 2 имело:

а) до столкновения $v_{12хh} / v_{хкр1} = 0,5$, $v_{12уh} / v_{хкр1} = 0,519615242271$,
 $M_{12h} = 0,721687836487$, $P_{12хh} / v_{хкр1} = 0,360843918244$, $P_{12уh} / v_{хкр1} = 0,375$,
 $E_{к12h} / v_{хкр1}^2 = 0,221687836487$;

б) после столкновения $v_{12хk} / v_{хкр1} = 0,5$, $v_{12уk} / v_{хкр1} = 0,812296415446$,
 $M_{12k} = 1,665052962837$, $P_{12хk} / v_{хкр1} = 0,832526481418$, $P_{12уk} / v_{хкр1} =$
 $1,35251655324$, $E_{к12k} / v_{хкр1}^2 = 1,165052962837$;

3) система тел 1 и 2 имело:

а) до столкновения массу $(M_{11h} + M_{12h}) = 3,370752550617$, проекции

импульса $(\mathbf{P}_{11\text{хн}} + \mathbf{P}_{12\text{хн}}) / v_{\text{хкр}1} = 1,685376275309$ и $(\mathbf{P}_{11\text{ун}} + \mathbf{P}_{12\text{ун}}) / v_{\text{хкр}1} = 2,439741604835$, кинетическую энергию $(E_{\text{к}11\text{н}} + E_{\text{к}12\text{н}}) / v_{\text{хкр}1}^2 = 1,870752550617$;

б) после столкновения массу $(M_{11\text{к}} + M_{12\text{к}}) = 3,370752550617$, проекции импульса $(\mathbf{P}_{11\text{хк}} + \mathbf{P}_{12\text{хк}}) / v_{\text{хкр}1} = 1,685376275309$ и $(\mathbf{P}_{11\text{ук}} + \mathbf{P}_{12\text{ук}}) / v_{\text{хкр}1} = 2,439741604835$, кинетическую энергию $(E_{\text{к}11\text{к}} + E_{\text{к}12\text{к}}) / v_{\text{хкр}1}^2 = 1,870752550617$.

По результатам расчета можно сделать следующий вывод: в примерах № 1 и № 2 в системах отсчета подвижной $O_2x_2y_2z_2$ и неподвижной $O_1x_1y_1z_1$ до и после столкновения масса, импульс и кинетическая энергия механической системы тел 1 и 2 остаются неизменными.

Следовательно формулы (95)-:(97), написанные для случая когда коэффициент перехода $\beta > 1$, удовлетворяют требованиям системы уравнений (77)-:(85).

10. Формула массы движущегося тела при $0 < \beta < 1$

С целью определения зависимости для массы движущегося тела при значении коэффициента перехода $\beta = \beta_<$ (т.е. при $0 < \beta < 1$) составим следующую систему уравнений:

$$[M_{01} \cdot f(V = v_{21\text{хн}}) \cdot v_{21\text{хн}}] + [M_{02} \cdot f(V = v_{22\text{хн}}) \cdot v_{22\text{хн}}] = [M_{01} \cdot f(V = v_{21\text{хк}}) \cdot v_{21\text{хк}}] + [M_{02} \cdot f(V = v_{22\text{хк}}) \cdot v_{22\text{хк}}] \quad (77)$$

$$\left\{ M_{01} \cdot \int_0^{v_{21\text{хн}}} \{ [f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2] \} \cdot dV \right\} + \left\{ M_{02} \cdot \int_0^{v_{22\text{хн}}} \{ [f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2] \} \cdot dV \right\} = \left\{ M_{01} \cdot \int_0^{v_{21\text{хк}}} \{ [f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2] \} \cdot dV \right\} + \left\{ M_{02} \cdot \int_0^{v_{22\text{хк}}} \{ [f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2] \} \cdot dV \right\} \quad (78)$$

$$[M_{01} \cdot f(V = v_{11\text{хн}}) \cdot v_{11\text{хн}}] + [M_{02} \cdot f(V = v_{12\text{хн}}) \cdot v_{12\text{хн}}] = [M_{01} \cdot f(V = v_{11\text{хк}}) \cdot v_{11\text{хк}}] + [M_{02} \cdot f(V = v_{12\text{хк}}) \cdot v_{12\text{хк}}] \quad (79)$$

$$\left\{ M_{01} \cdot \int_0^{v_{11\text{хн}}} \{ [f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2] \} \cdot dV \right\} + \left\{ M_{02} \cdot \int_0^{v_{12\text{хн}}} \{ [f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2] \} \cdot dV \right\} =$$

$$\{M_{01} \cdot \int_0^{V_{11\text{хк}}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{02} \cdot \int_0^{V_{12\text{хк}}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} \quad (80)$$

$$[M_{01} \cdot f(V = v_{21\text{yh}}) \cdot v_{21\text{yh}}] + [M_{02} \cdot f(V = v_{22\text{yh}}) \cdot v_{22\text{yh}}] = [M_{01} \cdot f(V = v_{21\text{yk}}) \cdot v_{21\text{yk}}] + [M_{02} \cdot f(V = v_{22\text{yk}}) \cdot v_{22\text{yk}}] \quad (81)$$

$$\{M_{01} \cdot \int_0^{V_{21\text{yh}}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{02} \cdot \int_0^{V_{22\text{yh}}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} = \{M_{01} \cdot \int_0^{V_{21\text{yk}}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{02} \cdot \int_0^{V_{22\text{yk}}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} \quad (82)$$

$$\{M_{01} \cdot f[V = (v_{11\text{yh}}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} + \{M_{02} \cdot f[V = (v_{12\text{yh}}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} = \{M_{01} \cdot f[V = (v_{11\text{yk}}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} + \{M_{02} \cdot f[V = (v_{12\text{yk}}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot V\} \quad (83)$$

$$\{M_{01} \cdot f[V = (v_{11\text{yh}}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{11\text{yh}}\} + \{M_{02} \cdot f[V = (v_{12\text{yh}}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{12\text{yh}}\} = \{M_{01} \cdot f[V = (v_{11\text{yk}}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{11\text{yk}}\} + \{M_{02} \cdot f[V = (v_{12\text{yk}}^2 + V^2)^{1/2}] \cdot v_{12\text{yk}}\} \quad (84)$$

$$\{M_{01} \cdot \int_0^{(v_{11\text{yh}}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{02} \cdot \int_0^{(v_{12\text{yh}}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} = \{M_{01} \cdot \int_0^{(v_{11\text{yk}}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} + \{M_{02} \cdot \int_0^{(v_{12\text{yk}}^2 + V^2)^{1/2}} \{[f(V) \cdot V] + [\dot{f}(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\} \quad (85)$$

В эту систему уравнений нужно также добавить уравнения связи между скоростями в подвижной $\mathbf{O}_2x_2y_2z_2$ и неподвижной $\mathbf{O}_1x_1y_1z_1$ системах отсчета, записанные исходя из формул (62) и (64):

$$v_{11\text{хн}} = (v_{21\text{хн}} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{21\text{хн}}) / v_{\text{хкр}2}^2]\} \quad (107)$$

$$v_{12\text{хн}} = (v_{22\text{хн}} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{22\text{хн}}) / v_{\text{хкр}2}^2]\} \quad (108)$$

$$v_{11\text{хк}} = (v_{21\text{хк}} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{21\text{хк}}) / v_{\text{хкр}2}^2]\} \quad (109)$$

$$v_{12\text{хк}} = (v_{22\text{хк}} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{22\text{хк}}) / v_{\text{хкр}2}^2]\} \quad (110)$$

$$v_{11\text{yh}} = v_{21\text{yh}} \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2} \quad (111)$$

$$v_{12\text{yh}} = v_{22\text{yh}} \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2} \quad (112)$$

$$v_{11\text{yk}} = v_{21\text{yk}} \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2} \quad (113)$$

$$v_{12\text{yk}} = v_{22\text{yk}} \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2} \quad (114)$$

Для рассмотрения имеется 17 уравнений, 12 неизвестных значения и одна неизвестная функция.

Единственной функцией способной удовлетворить всем требованиям

17 уравнений является:

$$f(V)_{<} = 1 / [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2} \quad (115)$$

Тогда с учетом уравнений (74)-:(76) можно записать зависимости для массы $M(V)_{<}$, импульса $P(V)_{<}$ и кинетической энергии $E_{\text{к}}(V)_{<}$ движущегося тела со скоростью V в случае, когда коэффициент перехода $0 < \beta < 1$:

$$M(V)_{<} = M_0 / [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2} \quad (116)$$

$$P(V)_{<} = (M_0 \cdot V) / [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2} \quad (117)$$

$$E_{\text{к}}(V)_{<} = M_0 \cdot v_{\text{хкр}2}^2 \cdot \{1 - \{1 / [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\}\} \quad (118)$$

11. Проверка правильности выбора формулы (115) при $0 < \beta < 1$ (для примеров № 1 и № 2)

С начала перепишем формулы (77)-:(85) с учетом формул (95)-:(97):

$$\{(M_{01} \cdot v_{21\text{хн}}) / [1 + (v_{21\text{хн}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{02} \cdot v_{22\text{хн}}) / [1 + (v_{22\text{хн}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} = \\ \{(M_{01} \cdot v_{21\text{хк}}) / [1 + (v_{21\text{хк}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{02} \cdot v_{22\text{хк}}) / [1 + (v_{22\text{хк}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} \quad (119)$$

$$\{M_{01} / [1 + (v_{21\text{хн}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} + \{M_{02} / [1 + (v_{22\text{хн}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} = \\ \{M_{01} / [1 + (v_{21\text{хк}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} + \{M_{02} / [1 + (v_{22\text{хк}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} \quad (120)$$

$$\{(M_{01} \cdot v_{11\text{хн}}) / [1 + (v_{11\text{хн}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{02} \cdot v_{12\text{хн}}) / [1 + (v_{12\text{хн}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} = \\ \{(M_{01} \cdot v_{11\text{хк}}) / [1 + (v_{11\text{хк}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{02} \cdot v_{12\text{хк}}) / [1 + (v_{12\text{хк}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} \quad (121)$$

$$\{M_{01} / [1 + (v_{11\text{хн}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} + \{M_{02} / [1 + (v_{12\text{хн}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} = \\ \{M_{01} / [1 + (v_{11\text{хк}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} + \{M_{02} / [1 + (v_{12\text{хк}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} \quad (122)$$

$$\{(M_{01} \cdot v_{21\text{yh}}) / [1 + (v_{21\text{yh}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{02} \cdot v_{22\text{yh}}) / [1 + (v_{22\text{yh}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} = \\ \{(M_{01} \cdot v_{21\text{yk}}) / [1 + (v_{21\text{yk}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} + \{(M_{02} \cdot v_{22\text{yk}}) / [1 + (v_{22\text{yk}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} \quad (123)$$

$$\{M_{01} / [1 + (v_{21\text{yh}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} + \{M_{02} / [1 + (v_{22\text{yh}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} = \\ \{M_{01} / [1 + (v_{21\text{yk}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} + \{M_{02} / [1 + (v_{22\text{yk}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} \quad (124)$$

$$\{(M_{01} \cdot V) / \{1 + [(v_{11\text{yh}}^2 + V^2) / v_{\text{хкр}2}^2]\}^{1/2}\} + \{(M_{02} \cdot V) / \{1 + [(v_{12\text{yh}}^2 + V^2) / v_{\text{хкр}2}^2]\}^{1/2}\} = \\ \{(M_{01} \cdot V) / \{1 + [(v_{11\text{yk}}^2 + V^2) / v_{\text{хкр}2}^2]\}^{1/2}\} + \{(M_{02} \cdot V) / \{1 + [(v_{12\text{yk}}^2 + V^2) / v_{\text{хкр}2}^2]\}^{1/2}\} \quad (125)$$

$$\{(M_{01} \cdot v_{11\text{yh}}) / \{1 + [(v_{11\text{yh}}^2 + V^2) / v_{\text{хкр}2}^2]\}^{1/2}\} + \{(M_{02} \cdot v_{12\text{yh}}) / \{1 + [(v_{12\text{yh}}^2 + V^2) / v_{\text{хкр}2}^2]\}^{1/2}\} = \\ \{(M_{01} \cdot v_{11\text{yk}}) / \{1 + [(v_{11\text{yk}}^2 + V^2) / v_{\text{хкр}2}^2]\}^{1/2}\} + \{(M_{02} \cdot v_{12\text{yk}}) / \{1 + [(v_{12\text{yk}}^2 + V^2) / v_{\text{хкр}2}^2]\}^{1/2}\} \quad (126)$$

$$\{M_{01} / \{1 + [(v_{11\text{yh}}^2 + V^2) / v_{\text{хкр}2}^2]\}^{1/2}\} + \{M_{02} / \{1 + [(v_{12\text{yh}}^2 + V^2) / v_{\text{хкр}2}^2]\}^{1/2}\} = \\ \{M_{01} / \{1 + [(v_{11\text{yk}}^2 + V^2) / v_{\text{хкр}2}^2]\}^{1/2}\} + \{M_{02} / \{1 + [(v_{12\text{yk}}^2 + V^2) / v_{\text{хкр}2}^2]\}^{1/2}\} \quad (127)$$

Где:

$$v_{11хн} = (v_{21хн} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{21хн}) / v_{хкр2}^2]\} \quad (107)$$

$$v_{12хн} = (v_{22хн} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{22хн}) / v_{хкр2}^2]\} \quad (108)$$

$$v_{11хк} = (v_{21хк} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{21хк}) / v_{хкр2}^2]\} \quad (109)$$

$$v_{12хк} = (v_{22хк} + V) / \{1 - [(V \cdot v_{22хк}) / v_{хкр2}^2]\} \quad (110)$$

$$v_{11ун} = v_{21ун} \cdot [1 + (V^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2} \quad (111)$$

$$v_{12ун} = v_{22ун} \cdot [1 + (V^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2} \quad (112)$$

$$v_{11ук} = v_{21ук} \cdot [1 + (V^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2} \quad (113)$$

$$v_{12ук} = v_{22ук} \cdot [1 + (V^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2} \quad (114)$$

Предположим, что $M_{01} = 1$, $M_{02} = 0,5$, $V / v_{хкр2} = 0,5$, $v_{21хн} / v_{хкр2} = v_{21ун} / v_{хкр2} = 0,9$, $v_{22хн} / v_{хкр2} = v_{22ун} / v_{хкр2} = 0,6$.

Тогда числовые расчеты дают следующие результаты для примера № 1:

1) в подвижной системе отсчета $O_2x_2y_2z_2$:

1) тело 1 имело:

а) до столкновения скорость $v_{21хн} / v_{хкр2} = 0,9$, массу $M_{21н} = 0,743294146247$, импульс $P_{21н} / v_{хкр2} = 0,668964731622$, кинетическую энергию $E_{к21н} / v_{хкр2}^2 = 0,256705853753$;

б) после столкновения $v_{21хк} / v_{хкр2} = 0,691099932748$, $M_{21к} = 0,822656908881$, $P_{21к} / v_{хкр2} = 0,568538134403$, $E_{к21к} / v_{хкр2}^2 = 0,177343091119$;

2) тело 2 имело:

а) до столкновения $v_{22хн} / v_{хкр2} = 0,6$, $M_{22н} = 0,428746462856$, $P_{22н} / v_{хкр2} = 0,257247877714$, $E_{к22н} / v_{хкр2}^2 = 0,071253537144$;

б) после столкновения $v_{22хк} / v_{хкр2} = 1,023729712365$, $M_{22к} = 0,349383700222$, $P_{22к} / v_{хкр2} = 0,357674474934$, $E_{к22к} / v_{хкр2}^2 = 0,150616299778$;

3) система тел 1 и 2 имело:

а) до столкновения массу $(M_{21н} + M_{22н}) = 1,172040609103$, импульс $(P_{21н} + P_{22н}) / v_{хкр2} = 0,926212609336$, кинетическую энергию $(E_{к21н} + E_{к22н}) / v_{хкр2}^2 = 0,327959390897$;

б) после столкновения массу $(M_{21к} + M_{22к}) = 1,172040609103$, импульс $(P_{21к} + P_{22к}) / v_{хкр2} = 0,926212609336$, кинетическую энергию

$$(E_{к21к} + E_{к22к}) / v_{хкр2}^2 = 0,327959390897 ;$$

II) в неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$:

1) тело 1 имело:

а) до столкновения $v_{11хн} / v_{хкр2} = 2,545454545455$, массу $M_{11н} = 0,365652372423$, импульс $P_{11н} / v_{хкр2} = 0,93075149344$, кинетическую энергию $E_{к11н} / v_{хкр2}^2 = 0,634347627577$;

б) после столкновения $v_{11хк} / v_{хкр2} = 1,820001331727$, $M_{11к} = 0,481548724902$, $P_{11к} / v_{хкр2} = 0,876419320614$, $E_{к11к} / v_{хкр2}^2 = 0,518451275098$;

2) тело 2 имело:

а) до столкновения $v_{12хн} / v_{хкр2} = 1,571428571429$, $M_{12н} = 0,268437746097$, $P_{12н} / v_{хкр2} = 0,421830743866$, $E_{к12н} / v_{хкр2}^2 = 0,231562253903$;

б) после столкновения $v_{12хк} / v_{хкр2} = 3,121532492927$, $M_{12к} = 0,152541393617$, $P_{12к} / v_{хкр2} = 0,476162916693$, $E_{к12к} / v_{хкр2}^2 = 0,347458606383$;

3) система тел 1 и 2 имело:

а) до столкновения массу $(M_{11н} + M_{12н}) = 0,63409011852$, импульс $(P_{11н} + P_{12н}) / v_{хкр2} = 1,352582237306$, кинетическую энергию $(E_{к11н} + E_{к12н}) / v_{хкр2}^2 = 0,86590988148$;

б) после столкновения массу $(M_{11к} + M_{12к}) = 0,63409011852$, импульс $(P_{11к} + P_{12к}) / v_{хкр2} = 1,352582237306$, кинетическую энергию $(E_{к11к} + E_{к12к}) / v_{хкр2}^2 = 0,86590988148$.

Для примера № 2 числовые расчеты дают следующие результаты:

I) в подвижной системе отсчета $O_2x_2y_2z_2$:

1) тело 1 имело:

а) до столкновения скорость $v_{21ун} / v_{хкр2} = 0,9$, массу $M_{21н} = 0,743294146247$, импульс $P_{21н} / v_{хкр2} = 0,668964731622$, кинетическую энергию $E_{к21н} / v_{хкр2}^2 = 0,256705853753$;

б) после столкновения $v_{21ук} / v_{хкр2} = 0,691099932748$, $M_{21к} = 0,822656908881$, $P_{21к} / v_{хкр2} = 0,568538134403$, $E_{к21к} / v_{хкр2}^2 = 0,177343091119$;

2) тело 2 имело:

а) до столкновения $v_{22ун} / v_{хкр2} = 0,6$, $M_{22н} = 0,428746462856$,

$$P_{22н} / v_{хкр2} = 0,257247877714, E_{к22н} / v_{хкр2}^2 = 0,071253537144;$$

$$б) \text{ после столкновения } v_{22ук} / v_{хкр2} = 1,023729712365, M_{22к} = 0,349383700222,$$

$$P_{22к} / v_{хкр2} = 0,357674474934, E_{к22к} / v_{хкр2}^2 = 0,150616299778;$$

3) система тел 1 и 2 имело:

$$а) \text{ до столкновения массу } (M_{21н} + M_{22н}) = 1,172040609103, \text{ импульс}$$

$$(P_{21н} + P_{22н}) / v_{хкр2} = 0,926212609336, \text{ кинетическую энергию}$$

$$(E_{к21н} + E_{к22н}) / v_{хкр2}^2 = 0,327959390897;$$

$$б) \text{ после столкновения массу } (M_{21к} + M_{22к}) = 1,172040609103, \text{ импульс}$$

$$(P_{21к} + P_{22к}) / v_{хкр2} = 0,926212609336, \text{ кинетическую энергию}$$

$$(E_{к21к} + E_{к22к}) / v_{хкр2}^2 = 0,327959390897;$$

II) в неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$:

1) тело 1 имело:

$$а) \text{ до столкновения } v_{11хн} / v_{хкр2} = 0,5, v_{11ун} / v_{хкр2} = 1,006230589875, \text{ массу}$$

$$M_{11н} = 0,664822495315, \text{ проекции импульса } P_{11хн} / v_{хкр2} = 0,332411247657 \text{ и}$$

$$P_{11ун} / v_{хкр2} = 0,668964731622, \text{ кинетическую энергию}$$

$$E_{к11н} / v_{хкр2}^2 = 0,335177504685;$$

$$б) \text{ после столкновения } v_{11хк} / v_{хкр2} = 0,5, v_{11ук} / v_{хкр2} = 0,772673214435,$$

$$M_{11к} = 0,735806708167, P_{11хк} / v_{хкр2} = 0,367903354084,$$

$$P_{11ук} / v_{хкр2} = 0,568538134403, E_{к11к} / v_{хкр2}^2 = 0,264193291833;$$

2) тело 2 имело:

$$а) \text{ до столкновения } v_{12хн} / v_{хкр2} = 0,5, v_{12ун} / v_{хкр2} = 0,67082039325,$$

$$M_{12н} = 0,383482494424, P_{12хн} / v_{хкр2} = 0,191741247212,$$

$$P_{12ун} / v_{хкр2} = 0,257247877714, E_{к12н} / v_{хкр2}^2 = 0,116517505576;$$

$$б) \text{ после столкновения } v_{12хк} / v_{хкр2} = 0,5, v_{12ук} / v_{хкр2} = 1,144564613718,$$

$$M_{12к} = 0,312498281571, P_{12хк} / v_{хкр2} = 0,156249140785,$$

$$P_{12ук} / v_{хкр2} = 0,357674474934, E_{к12к} / v_{хкр2}^2 = 0,187501718429;$$

3) система тел 1 и 2 имело:

$$а) \text{ до столкновения массу } (M_{11н} + M_{12н}) = 1,048304989738, \text{ проекции}$$

$$\text{импульса } (P_{11хн} + P_{12хн}) / v_{хкр2} = 0,524152494869 \text{ и}$$

$$(P_{11ун} + P_{12ун}) / v_{хкр2} = 0,926212609336, \text{ кинетическую энергию}$$

$$(E_{k11н} + E_{k12н}) / v_{хкр2}^2 = 0,451695010262;$$

б) после столкновения массу $(M_{11к} + M_{12к}) = 1,048304989738$, проекции импульса $(P_{11хк} + P_{12хк}) / v_{хкр2} = 0,524152494869$ и $(P_{11ук} + P_{12ук}) / v_{хкр2} = 0,926212609336$, кинетическую энергию $(E_{k11к} + E_{k12к}) / v_{хкр2}^2 = 0,451695010262$.

По результатам расчета можно сделать следующий вывод, в примерах № 1 и № 2 в системах отсчета подвижной $O_2x_2y_2z_2$ и неподвижной $O_1x_1y_1z_1$ до и после столкновения масса, импульс и кинетическая энергия механической системы тел 1 и 2 остаются неизменными.

Следовательно формулы (116)-:(118), написанные для случая, когда коэффициент перехода $0 < \beta < 1$, удовлетворяют требованиям системы уравнений (77)-:(85).

12. Сравнение формул (95)-:(97) с формулами (116)-:(118)

О зависимостях (95)-:(97):

$$M(V)_> = M_0 / [1 - (V^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2} \quad (95)$$

$$P(V)_> = (M_0 \cdot V) / [1 - (V^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2} \quad (96)$$

$$E_k(V)_> = M_0 \cdot v_{хкр1}^2 \cdot \{1 / [1 - (V^2 / v_{хкр1}^2)]^{1/2} - 1\} \quad (97)$$

для массы $M(V)_>$, импульса $P(V)_>$ и кинетической энергии $E_k(V)_>$ движущегося тела со скоростью V , в случае когда коэффициент перехода $\beta > 1$, можно сказать следующее:

- при скоростях несоизмеримо малых со скоростью $v_{хкр1}$: $M(V)_> = M_0$,
 $P(V)_> = M_0 \cdot V$, $E_k(V)_> = (M_0 \cdot V^2) / 2$;
- при $V = v_{хкр1}$: $M(V)_> = \infty$, $P(V)_> = \infty$, $E_k(V)_> = \infty$;
- при $V < v_{хкр1}$: $M(V)_>$, $P(V)_>$ и $E_k(V)_>$ - имеют действительные значения;
- при $V > v_{хкр1}$: $M(V)_>$, $P(V)_>$ и $E_k(V)_>$ - действительных значений не имеют.

Аналогично о зависимостях (116)-:(118):

$$M(V)_< = M_0 / [1 + (V^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2} \quad (116)$$

$$P(V)_< = (M_0 \cdot V) / [1 + (V^2 / v_{хкр2}^2)]^{1/2} \quad (117)$$

$$E_{\kappa}(V)_{<} = M_0 \cdot v_{\text{хкр}2}^2 \cdot \{1 - \{1 / [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\}\} \quad (118)$$

для массы $M(V)_{<}$, импульса $P(V)_{<}$ и кинетической энергии $E_{\kappa}(V)_{<}$ движущегося тела со скоростью V , в случае когда коэффициент перехода $0 < \beta < 1$, можно сказать следующее:

- при скоростях несоизмеримо малых со скоростью $v_{\text{хкр}2}$: $M(V)_{<} = M_0$,
 $P(V)_{<} = M_0 \cdot V$, $E_{\kappa}(V)_{<} = (M_0 \cdot V^2) / 2$;

- при $V = v_{\text{хкр}2}$: $M(V)_{<} = M_0 \cdot (2)^{-1/2}$, $P(V)_{<} = M_0 \cdot v_{\text{хкр}2} \cdot (2)^{-1/2}$ и
 $E_{\kappa}(V)_{<} = M_0 \cdot v_{\text{хкр}2}^2 \cdot [1 - (2)^{-1/2}]$;

- при $V = \infty$: $M(V)_{<}$ стремится к нулю, $P(V)_{<} = M_0 \cdot v_{\text{хкр}2}$,
 $E_{\kappa}(V)_{<} = M_0 \cdot v_{\text{хкр}2}^2$.

Используя формулы (95), (96), (46), (47), (52), (53) и (116), (117), (62), (63), (68), (69), также можно отметить, что как для коэффициента перехода $\beta > 1$, так и для $0 < \beta < 1$: сила F_x , в подвижной системе отсчета $O_2x_2y_2z_2$ приложенная к материальной точке, которая движется параллельно оси O_2x_2 или находится в состоянии покоя, и линия действия которой параллельна оси O_2x_2 , будет инвариантна для любой инерциальной системы отсчета, движущейся относительно системы $O_2x_2y_2z_2$ вдоль оси O_2x_2 .

13. Проверка на примере № 3 формул (94) при $\beta > 1$ и (115) при $0 < \beta < 1$

Проведенные проверки формул (94) и (115) на простейших примерах № 1 и № 2 еще не дают гарантию, что при использовании формул (95)-:(97) и (116)-:(118) для других замкнутых механических систем тел в инерциальных системах отсчета будет выполняться закон сохранения импульса.

Пример № 3

Допустим, что имеются две инерциальные системы отсчета, аналогичные системам отсчета, изображенным на рис.1, неподвижная $O_1x_1y_1z_1$ и подвижная $O_2x_2y_2z_2$, которая бы двигалась со скоростью V параллельно оси O_1x_1 относительно системы $O_1x_1y_1z_1$.

Предположим, что имеется замкнутая механическая система тел, показанная на рис.5 и состоящая из точечных тела 1 и тела 2, имеющих равные массы M_0 в состоянии покоя.

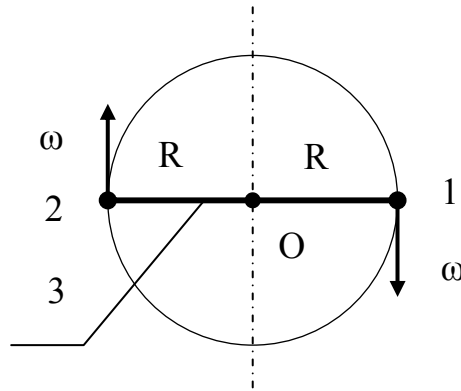


Рис. 5

Тела 1 и 2 соединены абсолютно жесткой (недеформируемой) нитью 3, не имеющей массы.

Тела 1 и 2 вращаются с угловой скоростью ω вокруг общего центра масс точки O . Расстояние от точечного тела 1 (тела 2) до точки O равно R .

Поместим рассматриваемую замкнутую систему тел 1 и 2 в подвижную систему отсчета $O_2x_2y_2z_2$ таким образом, чтобы точка O была бы неподвижна в этой системе и совпадала с началом координат O_2 , а вращение тел 1 и 2 вокруг нее происходило бы по часовой стрелке в плоскости $O_2x_2y_2$, как показано на рис. 6.

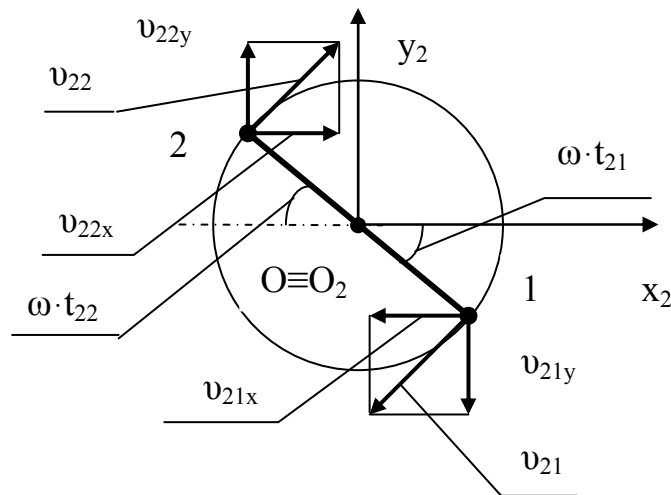


Рис. 6

Также допустим, что в момент начала отсчета времени ($t_2=0$) в системе отсчета $O_2x_2y_2z_2$ тела 1 и 2 находились на оси O_2x_2 , причем тело 1 имело положительную координату, а тело 2 – отрицательную.

Опираясь на выше сказанное можно отметить, что в подвижной системе отсчета $O_2x_2y_2z_2$ в любой момент времени t_2 тела 1 и 2 будут иметь скорости v_{21} и v_{22} соответственно равные:

$$v_{21} = v_{22} = v = \omega \cdot R \quad (128)$$

При этом проекции v_{21x} и v_{21y} скорости тела 1 и проекции v_{22x} и v_{22y} скорости тела 2 на оси O_2x_2 и O_2y_2 соответственно для моментов времени t_{21} и t_{22} будут равны:

$$v_{21x} = - [v \cdot \sin (\omega \cdot t_{21})] \quad (129)$$

$$v_{21y} = - [v \cdot \cos (\omega \cdot t_{21})] \quad (130)$$

$$v_{22x} = v \cdot \sin (\omega \cdot t_{22}) \quad (131)$$

$$v_{22y} = v \cdot \cos (\omega \cdot t_{22}) \quad (132)$$

Связь между координатами x_{21} и y_{21} тела 1 в зависимости от времени t_{21} и связь между координатами x_{22} и y_{22} тела 2 в зависимости от времени t_{22} в подвижной системе отсчета $O_2x_2y_2z_2$ можно записать в виде:

$$x_{21} = R \cdot \cos (\omega \cdot t_{21}) \quad (133)$$

$$y_{21} = - [R \cdot \sin (\omega \cdot t_{21})] \quad (134)$$

$$x_{22} = - [R \cdot \cos (\omega \cdot t_{22})] \quad (135)$$

$$y_{22} = R \cdot \sin (\omega \cdot t_{21}) \quad (136)$$

Опираясь на уравнения (1) и (3) можно написать связь между координатами x_{11} и y_{11} тела 1 в момент времени t_{11} в неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$ и координатами x_{21} и y_{21} тела 1 в момент времени t_{21} в подвижной системе отсчета $O_2x_2y_2z_2$:

$$x_{11} = \beta \cdot [x_{21} + (V \cdot t_{21})] \quad (137)$$

$$y_{11} = y_{21} \quad (138)$$

Аналогично используя уравнения (1) и (3) можно написать связь между координатами x_{12} и y_{12} тела 2 в момент времени t_{12} в неподвижной системе

отсчета $\mathbf{O}_1x_1y_1z_1$ и координатами x_{22} и y_{22} тела 2 в момент времени t_{22} в подвижной системе отсчета $\mathbf{O}_2x_2y_2z_2$:

$$x_{12} = \beta \cdot [x_{22} + (V \cdot t_{22})] \quad (139)$$

$$y_{12} = y_{22} \quad (140)$$

С помощью формулы (5) можно записать связь между значениями времен t_{11} , t_{21} и t_{12} , t_{22} :

$$t_{11} = \{[(\beta^2 - 1) \cdot x_{21}] / (\beta \cdot V)\} + (\beta \cdot t_{21}) \quad (141)$$

$$t_{12} = \{[(\beta^2 - 1) \cdot x_{22}] / (\beta \cdot V)\} + (\beta \cdot t_{22}) \quad (142)$$

В рассматриваемом примере нас будет интересовать положение тел 1 и 2 в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O}_1x_1y_1z_1$ в один и тот же момент времени, т.е. когда:

$$t_{11} = t_{12} \quad (143)$$

Тогда уравнение (143) с учетом формул (133), (135), (137), (139), (141) и (142) примет вид:

$$\{[(\beta^2 - 1) \cdot R \cdot \cos(\omega \cdot t_{21})] / (\beta \cdot V)\} + (\beta \cdot t_{21}) = \{[(1 - \beta^2) \cdot R \cdot \cos(\omega \cdot t_{22})] / (\beta \cdot V)\} + (\beta \cdot t_{22}) \quad (144)$$

В подвижной системе отсчета $\mathbf{O}_2x_2y_2z_2$ при выполнении условия (143) представляет интерес положение тел 1 и 2, когда:

$$t_{21} = t_{22} = t_{2p} \quad (145)$$

Подставив условие (145) в уравнение (144) и для случая, когда $(\omega \cdot t_{2p}) < \pi$, получим:

$$(\omega \cdot t_{2p}) = \pi / 2 \quad (146)$$

Также в подвижной системе отсчета $\mathbf{O}_2x_2y_2z_2$ при выполнении условия (143) представляет интерес положение тел 1 и 2, когда:

$$t_{21} = 0 \quad (147)$$

Значение времени t_{22} при выполнении условий (143) и (147) обозначим $t_{22\tau}$, для которого уравнение (144) примет вид:

$$t_{22\tau} = [1 - (1/\beta^2)] \cdot [1 + \cos(\omega \cdot t_{22\tau})] \cdot (R/V) \quad (148)$$

или:

$$\omega \cdot t_{22\tau} = [1 - (1/\beta^2)] \cdot [1 + \cos(\omega \cdot t_{22\tau})] \cdot (v/V) \quad (149)$$

Как видно из уравнения (149) значение времени $t_{22\tau}$ в зависимости от

значения коэффициента перехода β может быть:

- $t_{22T} > 0$ при $\beta > 1$;
- $t_{22T} < 0$ при $0 < \beta < 1$;
- $t_{22T} = 0$ при $\beta = 1$.

Теперь можем перейти к проверке выполнения закона сохранения импульса.

Рассмотрим два момента времени в неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$.

а) момент времени t_{1p}

Моменту времени t_{1p} в неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$, которому в подвижной системе отсчета $O_2x_2y_2z_2$ для тел 1 и 2 будет соответствовать момент времени t_{2p} .

Как показано на рис. 7 в соответствии с уравнением (146), (129)-:(132) в подвижной системе отсчета $O_2x_2y_2z_2$ в момент времени t_{2p} тело 1 и тело 2 соответственно будут иметь следующие значения проекций v_{21xp} , v_{21yp} и v_{22xp} , v_{22yp} скоростей своего движения на оси O_2x_2 и O_2y_2 :

$$v_{21xp} = -v \quad (150)$$

$$v_{21yp} = 0 \quad (151)$$

$$v_{22xp} = v \quad (152)$$

$$v_{22yp} = 0 \quad (153)$$

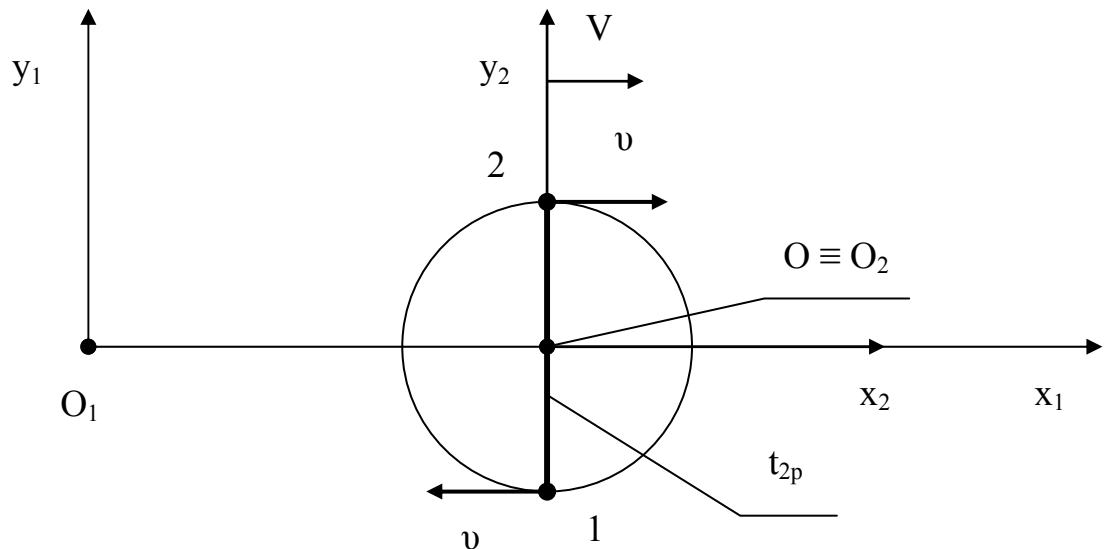


Рис. 7

Тогда исходя из формул (7), (9), (150) и (153) в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O}_1x_1y_1z_1$ в момент времени t_{1T} тело 1 и тело 2 соответственно будут иметь следующие значения проекций v_{11xT} , v_{11yT} и v_{12xT} , v_{12yT} скоростей своего движения на оси \mathbf{O}_1x_1 и \mathbf{O}_1y_1 :

$$v_{11xT} = V \quad (160)$$

$$v_{11yT} = - (v / \beta) \quad (161)$$

$$v_{12xT} = (V + v_{22xT}) / \{ \{ [(\beta^2 - 1) \cdot v_{22xT}] / (\beta^2 \cdot V) \} + 1 \} \quad (162)$$

$$v_{12yT} = v_{22yT} / \{ \{ [(\beta^2 - 1) \cdot v_{22xT}] / (\beta \cdot V) \} + \beta \} \quad (163)$$

Из уравнений (131) и (132) можно получить:

$$v_{22xT}^2 + v_{22yT}^2 = v^2 \quad (164)$$

Используя закон сохранения импульса для замкнутой механической системы тел 1 и 2 в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O}_1x_1y_1z_1$ для моментов времени t_{1P} и t_{1T} с учетом формул (74), (75), (151), (153), (155) и (157) можно записать:

$$[M_o \cdot f(V = v_{11xp}) \cdot v_{11xp}] + [M_o \cdot f(V = v_{12xp}) \cdot v_{12xp}] = \{M_o \cdot f[V = (v_{11xT}^2 + v_{11yT}^2)^{1/2}] \cdot v_{11xT}\} + \{M_o \cdot f[V = (v_{12xT}^2 + v_{12yT}^2)^{1/2}] \cdot v_{12xT}\} \quad (165)$$

$$0 = \{M_o \cdot f[V = (v_{11xT}^2 + v_{11yT}^2)^{1/2}] \cdot v_{11yT}\} + \{M_o \cdot f[V = (v_{12xT}^2 + v_{12yT}^2)^{1/2}] \cdot v_{12yT}\} \quad (166)$$

Определение условий выполнения закона импульса при $\beta > 1$

в примере № 3

В случае если коэффициент перехода $\beta > 1$, то значения β и функции $f(V)$ определяются:

$$\beta >^2 = 1 / [1 - (V^2 / v_{\text{хкр}1}^2)] \quad (24)$$

$$f(V)_{>} = 1 / [1 - (V^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \quad (94)$$

Тогда с учетом формулы (94) уравнения (165) и (166) примут вид:

$$\{ (M_o \cdot v_{11xp}) / [1 - (v_{11xp}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} + \{ (M_o \cdot v_{12xp}) / [1 - (v_{12xp}^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \} = \{ (M_o \cdot v_{11xT}) / \{ 1 - [(v_{11xT}^2 + v_{11yT}^2) / v_{\text{хкр}1}^2] \}^{1/2} \} + \{ (M_o \cdot v_{12xT}) / \{ 1 - [(v_{12xT}^2 + v_{12yT}^2) / v_{\text{хкр}1}^2] \}^{1/2} \} \quad (167)$$

$$0 = \{ (M_o \cdot v_{11yT}) / \{ 1 - [(v_{11xT}^2 + v_{11yT}^2) / v_{\text{хкр}1}^2] \}^{1/2} \} + \{ (M_o \cdot v_{12yT}) / \{ 1 - [(v_{12xT}^2 + v_{12yT}^2) / v_{\text{хкр}1}^2] \}^{1/2} \} \quad (168)$$

Формулы (154), (156) и (160)-(163) с учетом формулы (24) можно

записать:

$$v_{11xp} = (V - v) / \{1 - [(V \cdot v) / v_{xkp1}^2]\} \quad (169)$$

$$v_{12xp} = (V + v) / \{1 + [(V \cdot v) / v_{xkp1}^2]\} \quad (170)$$

$$v_{11xt} = V \quad (160)$$

$$v_{11yt} = - \{v \cdot [1 - (V^2 / v_{xkp1}^2)]^{1/2}\} \quad (171)$$

$$v_{12xt} = (V + v_{22xt}) / \{1 + [(V \cdot v_{22xt}) / v_{xkp1}^2]\} \quad (172)$$

$$v_{12yt} = \{v_{22yt} \cdot [1 - (V^2 / v_{xkp1}^2)]^{1/2}\} / \{1 + [(V \cdot v_{22xt}) / v_{xkp1}^2]\} \quad (173)$$

Вставив проекции скоростей v_{11xp} , v_{12xp} , v_{11xt} , v_{11yt} , v_{12xt} и v_{12yt} из формул (160), (169)-(173) в уравнения (167) и (168) с учетом формулы (164) получим:

$$\{[M_o \cdot (V - v)] / \{[1 - (v^2 / v_{xkp1}^2)]^{1/2} \cdot [1 - (V^2 / v_{xkp1}^2)]^{1/2}\}\} + \{[M_o \cdot (V + v)] / \{[1 - (v^2 / v_{xkp1}^2)]^{1/2} \cdot [1 - (V^2 / v_{xkp1}^2)]^{1/2}\}\} = \{[M_o \cdot V] / \{[1 - (v^2 / v_{xkp1}^2)]^{1/2} \cdot [1 - (V^2 / v_{xkp1}^2)]^{1/2}\}\} + \{[M_o \cdot (V + v_{22xt})] / \{[1 - (v^2 / v_{xkp1}^2)]^{1/2} \cdot [1 - (V^2 / v_{xkp1}^2)]^{1/2}\}\} \quad (174)$$

$$0 = - \{(M_o \cdot v) / [1 - (v^2 / v_{xkp1}^2)]^{1/2}\} + \{(M_o \cdot v_{22yt}) / [1 - (v^2 / v_{xkp1}^2)]^{1/2}\} \quad (175)$$

Из уравнений (174) и (175) получаем необходимые условия (значения v_{22xt} и v_{22yt}), при которых в примере № 3 при коэффициенте перехода $\beta > 1$ будет выполняться закон сохранения импульса:

$$v_{22xt} = 0 \quad (176)$$

$$v_{22yt} = v \quad (177)$$

Подставив условия (176) и (177) в уравнения (131) и (132), получим:

$$t_{22t} = t_{21t} = 0 \quad (178)$$

А подставив уравнение (178) в формулу (149):

$$\omega \cdot 0 = [1 - (1 / \beta^2)] \cdot (1 + 1) \cdot (v / V) \quad (179)$$

получим еще одно условие выполнения закона сохранения импульса для примера № 3:

$$\beta = 1 \quad (180)$$

Таким образом получается, что в замкнутой механической системе тел, рассматриваемой в примере № 3, для значений коэффициента перехода $\beta > 1$ закон сохранения импульса не выполняется.

Условия выполнения закона импульса при $0 < \beta < 1$ в примере №3

В случае если коэффициенте перехода $0 < \beta < 1$, то значения β и $f(V)$ определяются:

$$\beta_{<}^2 = 1 / [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)] \quad (25)$$

$$f(V)_{<} = 1 / [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2} \quad (115)$$

Тогда с учетом формулы (115) уравнения (165) и (166) примут вид:

$$\{(M_o \cdot v_{11\text{хр}}) / [1 + (v_{11\text{хр}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} + \{(M_o \cdot v_{12\text{хр}}) / [1 + (v_{11\text{хр}}^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} = \{(M_o \cdot v_{11\text{хт}}) / \{1 + [(v_{11\text{хт}}^2 + v_{11\text{ут}}^2) / v_{\text{хкр}2}^2]\}^{1/2}\} + \{(M_o \cdot v_{12\text{хт}}) / \{1 + [(v_{12\text{хт}}^2 + v_{12\text{ут}}^2) / v_{\text{хкр}2}^2]\}^{1/2}\} \quad (181)$$

$$0 = \{(M_o \cdot v_{11\text{ут}}) / \{1 + [(v_{11\text{хт}}^2 + v_{11\text{ут}}^2) / v_{\text{хкр}2}^2]\}^{1/2}\} + \{(M_o \cdot v_{12\text{ут}}) / \{1 + [(v_{12\text{хт}}^2 + v_{12\text{ут}}^2) / v_{\text{хкр}2}^2]\}^{1/2}\} \quad (182)$$

Формулы (154), (156) и (160)-(163) с учетом формулы (25) можно записать:

$$v_{11\text{хр}} = (V - v) / \{1 + [(V \cdot v) / v_{\text{хкр}2}^2]\} \quad (183)$$

$$v_{12\text{хр}} = (V + v) / \{1 - [(V \cdot v) / v_{\text{хкр}2}^2]\} \quad (184)$$

$$v_{11\text{хт}} = V \quad (160)$$

$$v_{11\text{ут}} = - \{v \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} \quad (185)$$

$$v_{12\text{хт}} = (V + v_{22\text{хт}}) / \{1 - [(V \cdot v_{22\text{хт}}) / v_{\text{хкр}2}^2]\} \quad (186)$$

$$v_{12\text{ут}} = \{v_{22\text{ут}} \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} / \{1 - [(V \cdot v_{22\text{хт}}) / v_{\text{хкр}2}^2]\} \quad (187)$$

Вставив проекции скоростей $v_{11\text{хр}}$, $v_{12\text{хр}}$, $v_{11\text{хт}}$, $v_{11\text{ут}}$, $v_{12\text{хт}}$ и $v_{12\text{ут}}$ из формул (160), (183)-(187) в уравнения (167) и (168) с учетом формулы (164) получим:

$$\{[M_o \cdot (V - v)] / \{[1 + (v^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2} \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\}\} + \{[M_o \cdot (V + v)] / \{[1 + (v^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2} \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\}\} = \{[M_o \cdot V] / \{[1 + (v^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2} \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\}\} + \{[M_o \cdot (V + v_{22\text{хт}})] / \{[1 + (v^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2} \cdot [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\}\} \quad (188)$$

$$0 = - \{(M_o \cdot v) / [1 + (v^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} + \{(M_o \cdot v_{22\text{ут}}) / [1 + (v^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2}\} \quad (189)$$

Из уравнений (188) и (189) получаем необходимые условия (значения $v_{22\text{хт}}$ и $v_{22\text{ут}}$), при которых в примере № 3 при коэффициенте перехода $0 < \beta < 1$ будет выполняться закон сохранения импульса:

$$v_{22\text{хт}} = 0 \quad (176)$$

$$v_{22\text{ут}} = v \quad (177)$$

А это означает, что:

$$t_{22T} = t_{21T} = 0 \quad (178)$$

и условием выполнения закона сохранения импульса для примера № 3 также является:

$$\beta = 1 \quad (180)$$

Таким образом получается, что в замкнутой механической системе тел, рассматриваемой в примере № 3, и для значений коэффициента перехода $0 < \beta < 1$ закон сохранения импульса не выполняется.

Подтвердим выше сказанное числовыми расчетами.

1) для случая, когда значения коэффициента перехода $\beta > 1$

Предположим, что $V / v_{\text{хкр1}} = 0,9$, $v / v_{\text{хкр1}} = 0,6$.

Уравнение (149) с учетом формулы (24) можно записать в виде:

$$\omega \cdot t_{22T} = [(v \cdot V) / v_{\text{хкр1}}^2] \cdot [1 + \text{Cos}(\omega \cdot t_{22T})] \quad (190)$$

Тогда получим:

$\omega \cdot t_{22T} = 0,8828669738$, проекции $v_{22xT} / v_{\text{хкр1}} = 0,4635374427$ и $v_{22yT} / v_{\text{хкр1}} = 0,3809633042$ скорости движения тела 2 в подвижной системе отсчета $O_2x_2y_2z_2$.

В неподвижной инерциальной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$:

а) в момент времени t_{1p} тела 1 и 2 соответственно имели проекции $K_{11xp} / v_{\text{хкр1}} = 0,860309002$ и $K_{12xp} / v_{\text{хкр1}} = 4,30154501$ импульса на ось O_1x_1 ;

б) в момент времени t_{1T} тело 1 имело проекции $K_{11xT} / v_{\text{хкр1}} = 2,580927006$ и $K_{11yT} / v_{\text{хкр1}} = -0,75$ импульса на оси O_1x_1 и O_1y_1 ;

в) в момент времени t_{1T} тело 2 имело проекции $K_{12xT} / v_{\text{хкр1}} = 3,9102117884$ и $K_{12yT} / v_{\text{хкр1}} = 0,4762041303$ импульса на оси O_1x_1 и O_1y_1 ;

г) в момент времени t_{1p} система тел 1 и 2 имела проекции $K_{11x\Sigma p} / v_{\text{хкр1}} = 5,161854012$ и $K_{12y\Sigma p} / v_{\text{хкр1}} = 0$ импульса на оси O_1x_1 и O_1y_1 ;

д) в момент времени t_{1T} система тел 1 и 2 имела проекции $K_{11x\Sigma T} / v_{\text{хкр1}} = 6,491138794$ и $K_{12y\Sigma T} / v_{\text{хкр1}} = -0,2737958696$ импульса на оси O_1x_1 и O_1y_1 .

Закон сохранения импульса не выполняется, т.к.: $5,161854012 \neq 6,491138794$ и $-0,2737958696 \neq 0$.

2) для случая, когда значения коэффициента перехода $0 < \beta < 1$

Предположим, что $V / v_{\text{хкр}2} = 0,9$, $v / v_{\text{хкр}2} = 0,6$.

Уравнение (149) с учетом формулы (25) можно записать в виде:

$$\omega \cdot t_{22\Gamma} = - [(v \cdot V) / v_{\text{хкр}2}^2] \cdot [1 + \text{Cos}(\omega \cdot t_{22\Gamma})] \quad (191)$$

Тогда получим:

$\omega \cdot t_{22\Gamma} = - 0,8828669738$, проекции $v_{22\text{хт}} / v_{\text{хкр}2} = - 0,4635374427$ и $v_{22\text{ут}} / v_{\text{хкр}2} = 0,3809633042$ скорости движения тела 2 в подвижной системе отсчета $O_2x_2y_2z_2$.

В неподвижной инерциальной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$:

а) в момент времени t_{1p} тела 1 и 2 соответственно имели проекции $K_{11\text{хр}} / v_{\text{хкр}2} = 0,1912108416$ и $K_{12\text{хр}} / v_{\text{хкр}2} = 0,9560542082$ импульса на ось O_1x_1 ;

б) в момент времени $t_{1\Gamma}$ тело 1 имело проекции $K_{11\text{хт}} / v_{\text{хкр}2} = 0,5736325249$ и $K_{11\text{ут}} / v_{\text{хкр}2} = - 0,5144957554$ импульса на оси O_1x_1 и O_1y_1 соответственно;

в) в момент времени $t_{1\Gamma}$ тело 2 имело проекции $K_{12\text{хт}} / v_{\text{хкр}2} = 0,2781879097$ и $K_{12\text{ут}} / v_{\text{хкр}2} = 0,3266733383$ импульса на оси O_1x_1 и O_1y_1 ;

г) в момент времени t_{1p} система тел 1 и 2 имела проекции $K_{11\text{х}\Sigma p} / v_{\text{хкр}2} = 1,1472650498$ и $K_{12\text{у}\Sigma p} / v_{\text{хкр}2} = 0$ импульса на оси O_1x_1 и O_1y_1 ;

д) в момент времени $t_{1\Gamma}$ система тел 1 и 2 имела проекции $K_{11\text{х}\Sigma \Gamma} / v_{\text{хкр}2} = 0,8518204346$ и $K_{12\text{у}\Sigma \Gamma} / v_{\text{хкр}2} = - 0,187822417$ импульса на оси O_1x_1 и O_1y_1 .

Закон сохранения импульса не выполняется, т.к.: $1,1472650498 \neq 0,8518204346$ и $- 0,187822417 \neq 0$.

14. Заключение

В заключение можно обобщить выше написанное.

Кинематика

Исходя из принципа относительности, симметрии пространства и времени было получено:

1. Значения коэффициента перехода β для инерциальных систем отсчета могут находиться в трех взаимоисключающих диапазонах:

- $\beta > 1$,
- $0 < \beta < 1$,
- $\beta = 1$;

2. Значение коэффициента перехода β для инерциальных систем отсчета для случая $\beta > 1$ определяется формулой:

$$\beta_{>}^2 = 1 / [1 - (V^2 / v_{\text{хкр}1}^2)] \quad (24)$$

3. Значение коэффициента перехода β для инерциальных систем отсчета для случая $0 < \beta < 1$ определяется формулой:

$$\beta_{<}^2 = 1 / [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)] \quad (25)$$

4. При коэффициенте перехода $\beta > 1$ существует такое значение скорости $v_{\text{хкр}1}$ движения точки, которое было бы инвариантно во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета:

$$v_{\text{хкр}1} = \text{Const} \quad (40)$$

5. При коэффициенте перехода $0 < \beta < 1$ имеет место только мнимое значение скорости $V_{\text{хкр}2}$ (равное $(i \cdot v_{\text{хкр}2})$) движения точки, которое было бы инвариантно во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета:

$$v_{\text{хкр}2} = \text{Const} \quad (41)$$

Динамика

1. Используя обязательность выполнения в инерциальных системах отсчета закона сохранения импульса и закона сохранения механической энергии (а точнее его частного случая - закона сохранения кинетической энергии) для замкнутой механической системы тел, двигающихся прямолинейно и испытывающих только абсолютно упругие взаимодействия, были получены зависимости массы тела от скорости его движения:

$$- M(V)_{>} = M_0 / [1 - (V^2 / v_{\text{хкр}1}^2)]^{1/2} \quad (95) \quad \text{при } \beta > 1 ;$$

$$- M(\mathbf{V})_{<} = M_0 / [1 + (V^2 / v_{\text{хкр}2}^2)]^{1/2} \quad (116) \quad \text{при } 0 < \beta < 1 .$$

2. Закон сохранения импульса замкнутой механической системы тел, двигающихся непрямолинейно, для любого момента времени в инерциальных системах отсчета (во всех, кроме системы отсчета, в которой центр масс системы тел неподвижен) не выполняется:

- при $\beta > 1$,
- при $0 < \beta < 1$.

Таким образом исходя из того, что в отдельном примере происходит невыполнение закона сохранения импульса замкнутой механической системы тел, можно сделать неутешительный вывод:

- в однонаправленных инерциальных системах отсчета коэффициент перехода β не может быть больше или меньше 1, а может быть только равен 1 ;

- в инерциальных системах отсчета коэффициент перехода β не зависит от величины скорости V движения инерциальных систем отсчета.

Здесь также следует отметить, что вывод сделан только для случая однородности и изотропности пространства и однородности времени.

Данный вывод может оказаться неправильным, если удастся доказать, что функция $\mathbf{f}(\mathbf{V})$ может быть представлена не только функциями $\mathbf{f}(\mathbf{V})_{>}$ (формула (94)) и $\mathbf{f}(\mathbf{V})_{<}$ (формула (115)).

Автор

В.Н. Кочетков

Статья "Комментарии к специальной теории относительности" напечатана в журнале "Актуальные проблемы современной науки" (ISSN 1680-2721) № 6 (33) за 2006 год.