Рубрика: математическая физика.

Тематика: специальная теория относительности.

Кочетков Виктор Николаевич

главный специалист ФГУП «Центр эксплуатации объектов наземной космической инфраструктуры» (ФГУП «ЦЭНКИ»)

КОММЕНТАРИИ ПО ВОПРОСУ ПРИМЕНИМОСТИ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОТСЧЕТА ПРИ УСЛОВИИ СИММЕТРИИ ПРОСТРАНСТВА И ВРЕМЕНИ

(исправленная и дополненная)

В данной статье делается попытка установить, являются ли в специальной теории относительности преобразования Лоренца единственно возможной связью между координатами и временем в инерциальных системах отсчета, а также соответствуют ли выводы специальной теории относительности требованиям, накладываемым условием симметрии пространства и времени.

1. Введение

В настоящее время в журналах и Интернете публикуется большое количество статей, посвященных критике специальной теории относительности.

Причем критические замечания в отношении специальной теории относительности в основном состоят из описания логического несоответствия ее выводов реальному представлению пространства и времени.

Но ведь специальная теория относительности – это идеализированная математическая модель, построенная в рамках определенных условий, и поэтому результаты ее не могут быть в обязательном порядке распространены вне рамок, установленных для нее условий.

По-моему, если уж и критиковать специальную теорию относительности, то критику надо было бы начать с ее математической модели.

Может, было бы полезно еще раз рассмотреть математическую модель специальной теории относительности, а выводы ее проверить на выполнение условий, закладываемых при ее создании.

1.1. Краткая история создания специальной теории относительности

На рубеже XIX-XX веков стараниями крупнейших физиков мира была создана специальная теория относительности.

В конце XIX столетия между двумя важнейшими разделами физики - механикой и электродинамикой - возникли серьезные противоречия.

В механике утвердился принцип относительности Галилея - полное равноправие систем отсчета, движущихся относительно друг друга прямолинейно и равномерно.

В электродинамике основополагающее место заняла идея эфира - среды, заполняющей мировое пространство, и в которой происходят все физические процессы, в т.ч. электромагнитные колебания. При этом движение частиц и поля следовало описывать в координатах, жестко связанных с эфиром - абсолютной системой отсчета.

В 1881, 1886÷1887 годах А. Майкельсону и Э. Моли в ходе экспериментов не удалось зарегистрировать "эфирный ветер". В результате эфирная теория света, казалось бы надежно подтвержденная опытами, не согласовывалась с классической механикой.

В 1889 году ирландский физик Д. Фицджеральд предложил принять, что при движении тела со скоростью **V** относительно эфира его продольный размер ***l′*** испытывает сокращение по закону:

$$l' = l \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \qquad (1)$$

где: **с** - скорость света,

l - длина неподвижного в отношении эфира тела.

В 1892 году нидерландский физик Х. Лоренц дополнил гипотезу Д. Фицджеральда идеей "местного" времени ***t′***, связанного с "истинным" универсальным временем ***t*** преобразованием:

$$t' = t - \left(\frac{x \cdot v}{c^2}\right) \qquad (2)$$

где: ***v*** - скорость движения тела при прохождении точки пространства с координатой **x.**

Также Х. Лоренц видоизменил преобразования Галилея на случай больших скоростей:

$$x_1 = \beta \cdot [x_2 + (V \cdot t_2)] \qquad (3)$$

$$y_1 = y_2 \qquad (4)$$

$$z_1 = z_2 \qquad (5)$$

$$t_1 = \beta \cdot \left[t_2 + \left(\frac{x_2 \cdot V}{c^2}\right)\right] \qquad (6)$$

путем введения "релятивистского" множителя **β** :

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad (7)$$

Формулы (3)÷(6) перехода между инерциальными системами отсчета получили наименование "преобразования Лоренца".

Еще в 1881 году английский физик Д. Томсон предположил, что масса **M** тела, движущегося со скоростью ***v***, будет больше, чем масса $\mathbf{M_0}$ в состоянии покоя, причем величина **M** равна:

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (8)$$

1.2. Специальная теория относительности

В 1905 году А. Эйнштейн взял за основу фундаментальные принципы, в сжатом виде передающие суть двух классических физических теорий: из механики - принцип равноправия всех инерциальных систем отсчета (принцип относительности), из электродинамики - принцип постоянства скорости света.

Принцип относительности: **в любых инерциальных системах отсчета все физические явления при одних и тех же условиях протекают одинаково**, т.е. физические законы независимы (инвариантны) по отношению к выбору инерциальной системы отсчета - уравнения, выражающие эти законы, имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета.

Принцип инвариантности скорости света: **скорость света в вакууме не зависит от движения источника света**, т.е. скорость света одинакова во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета.

Используя принцип относительности и принцип постоянства скорости света, А. Эйнштейн вывел преобразования Лоренца, однако придал им иной физический смысл:

$$\mathrm{x}_1 = \frac{\mathrm{x}_2 + (\mathrm{V} \cdot t_2)}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{V}^2}{c^2}}} \qquad (9)$$

$$\mathrm{x}_2 = \frac{\mathrm{x}_1 - (\mathrm{V} \cdot t_1)}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{V}^2}{c^2}}} \qquad (10)$$

$$\mathrm{y}_1 = \mathrm{y}_2 \qquad (11)$$

$$\mathrm{z}_1 = \mathrm{z}_2 \qquad (12)$$

где: $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{z_1}$ – координаты точки **A** в момент времени t_1 в неподвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$;

$\mathbf{x_2}$, $\mathbf{y_2}$, $\mathbf{z_2}$ – координаты точки **A** в момент времени t_2 в подвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ (как показано на рис. 1).

$$t_1 = \frac{t_2 + \left(\frac{x_2 \cdot V}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad (13)$$

$$t_2 = \frac{t_1 - \left(\frac{x_1 \cdot V}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad (14)$$

Исходя из формул (9)÷(14), связь между проекциями $\mathbf{v_{x2}}$, $\mathbf{v_{y2}}$ и $\mathbf{v_{z2}}$ скорости движения точки **A** в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ на оси декартовых координат и аналогичными проекциями $\mathbf{v_{x1}}$, $\mathbf{v_{y1}}$ и $\mathbf{v_{z1}}$ скорости той же точки **A** в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ определена в виде:

$$v_{x1} = \frac{v_{x2} + V}{1 + \frac{V \cdot v_{x2}}{c^2}} \qquad (15)$$

$$v_{x2} = \frac{v_{x1} - V}{1 - \frac{V \cdot v_{x1}}{c^2}} \qquad (16)$$

$$v_{y1} = \frac{v_{y2} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V \cdot v_{x2}}{c^2}} \qquad (17)$$

$$v_{y2} = \frac{v_{y1} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V \cdot v_{x1}}{c^2}} \qquad (18)$$

$$v_{z1} = \frac{v_{z2} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V \cdot v_{x2}}{c^2}} \qquad (19)$$

$$v_{z2} = \frac{v_{z1} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V \cdot v_{x1}}{c^2}} \qquad (20)$$

В специальной теории относительности зависимости массы **M(V)** , импульса **P(V)** и кинетической энергии **$E_к$(V)** материальной точки, движущейся со скоростью **V**, выражаются формулами:

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{21}$$

$$P(V) = \frac{M_0 \cdot V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{22}$$

$$E_k(V) = M_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - 1 \right) \tag{23}$$

где: $\mathbf{M_o}$ - масса этой материальной точки в состоянии покоя.

В заключение можно отметить, что специальная теория относительности была создана в первую очередь для объяснения результатов экспериментов (А. Майкельсона и др.), приведших к рассмотрению вопроса о постоянстве скорости света (а точнее к объяснению постоянства скорости света).

2. Кинематика

2.1. "Специальная теория относительности в общем виде"

Чтобы не путаться в наименованиях, предполагаемую ниже идею назовем "специальная теория относительности в общем виде".

Предположим, что пространство однородно и изотропно, а время однородно (т.е. имеется симметрия пространства и времени).

При рассмотрении будем использовать принцип относительности: **в любых инерциальных системах отсчета все физические явления при одних и тех же условиях протекают одинаково.**

В связи с отсутствием необходимости не будем применять принцип инвариантности скорости света (т.е. применим менее жесткие условия).

Предположим, что имеются две инерциальные системы отсчета: неподвижная $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижная $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, изображенные на рис. 1 и у которых:

- сходные оси декартовых координат систем $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ попарно параллельны и одинаково направлены;
- система $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ движется относительно системы $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ с постоянной скоростью $\mathbf{V_2}$ относительно оси $\mathbf{Ox_1}$;
- в качестве начала отсчета времени (t_1=0 и t_2=0) в обеих системах выбран тот момент, когда начала координат $\mathbf{O_1}$ и $\mathbf{O_2}$ этих систем совпадают.

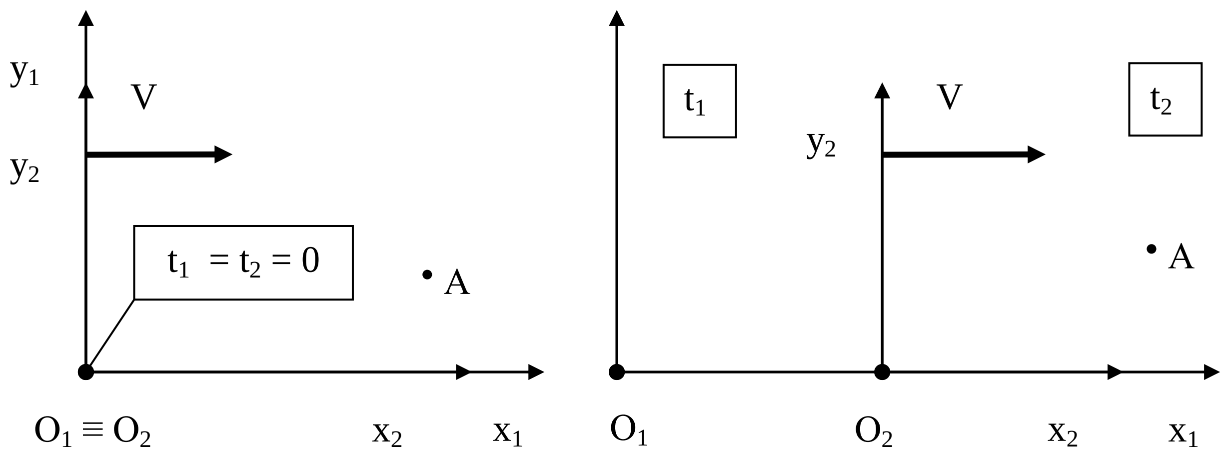

Рис. 1

Исходя из симметрии пространства и времени (однородности и изотропности пространства и однородности времени), соотношения между координатами и временем одного и того же события в двух инерциальных системах отсчета неподвижной $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижной $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ могут быть записаны следующим образом:

$$x_1 = \beta_1 \cdot [x_2 + (V_1 \cdot t_2)] \qquad (24)$$

$$x_2 = \beta_2 \cdot [x_1 + (V_2 \cdot t_1)] \qquad (25)$$

$$y_1 = \beta_3 \cdot y_2 \qquad (26)$$

$$y_2 = \beta_4 \cdot y_1 \qquad (27)$$

$$z_1 = \beta_5 \cdot z_2 \qquad (28)$$

$$z_2 = \beta_6 \cdot z_1 \qquad (29)$$

где: $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{z_1}$ и $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{y_2}$, $\mathbf{z_2}$ – координаты точки **A** в системах отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$,соответственно;

$\boldsymbol{t_1}$ и $\boldsymbol{t_2}$ - значения времени в системах отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, соответственно;

$\boldsymbol{\beta_1}$, $\boldsymbol{\beta_2}$, $\boldsymbol{\beta_3}$, $\boldsymbol{\beta_4}$, $\boldsymbol{\beta_5}$ и $\boldsymbol{\beta_6}$ - коэффициенты перехода;

$\mathbf{V_1}$ - скорость движения системы $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ относительно системы $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$.

Использование принципа относительности и симметрии пространства и времени позволяет получить:

$$V_1 = -V_2 = V \qquad (30)$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta \qquad (31)$$

$$\beta_3 = \beta_4 = 1 \qquad (32)$$

$$\beta_5 = \beta_6 = 1 \qquad (33)$$

При этом система уравнений (24)÷(29) упростится и примет вид:

$$x_1 = \beta \cdot [x_2 + (V \cdot t_2)] \qquad (34)$$

$$x_2 = \beta \cdot [x_1 - (V \cdot t_1)] \qquad (35)$$

$$y_1 = y_2 \qquad (36)$$

$$z_1 = z_2 \qquad (37)$$

Причем коэффициент перехода $\boldsymbol{\beta}$ не зависит от значений координат $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{y_2}$, $\mathbf{z_2}$ и времени $\boldsymbol{t_1}$ и $\boldsymbol{t_2}$, а предположительно может являться функцией скорости **V** перемещения систем отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ относительно друг друга.

Из формул (34) и (35) можно записать зависимость для значений времен $\boldsymbol{t_1}$ и $\boldsymbol{t_2}$:

$$t_1 = \frac{(\beta^2 - 1) \cdot x_2}{\beta \cdot V} + (\beta \cdot t_2) \qquad (38)$$

$$t_2 = \frac{(1 - \beta^2) \cdot x_1}{\beta \cdot V} + (\beta \cdot t_1) \qquad (39)$$

Про коэффициент перехода **β** в формулах (34) и (35) можно сказать следующее:

- исходя из принципа относительности, симметрии пространства и времени коэффициент перехода **β** может быть только действительной величиной;

- коэффициент перехода **β** будет равен 1 при **V** = 0 (граничное условие);

- коэффициент перехода **β** будет равен 1, если коэффициент перехода **β** не будет зависеть от величины скорости **V**;

- при принятом направлении оси декартовых координат систем $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ коэффициент перехода **β** будет больше 0 , так как отрицательные значения коэффициент перехода **β** будет иметь при разной направленности осей $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_2x_2}$;

- при значении коэффициента перехода **β** > 1 линейный размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, уменьшается в направлении движения и ход времени часов, движущихся относительно инерциальной системы отсчета, замедляется;

- при значении коэффициента перехода 0 < **β** < 1 линейный размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, увеличивается в направлении движения и ход времени часов, движущихся относительно инерциальной системы отсчета, ускоряется;

- принцип относительности и симметрия пространства и времени определяют также, что в случае зависимости коэффициента перехода **β** от величины скорости **V** величина коэффициента перехода **β** однозначно зависит от величины скорости **V** (т.е. одному конкретному значению скорости **V** может соответствовать только одно конкретное значение коэффициента перехода **β**).

Формулы (24)÷(29) однозначно определяют связь между координатами $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{y_1}$ и $\mathbf{z_1}$ точки **A** и временем $\boldsymbol{t_1}$ в неподвижной системе $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и координатами $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{y_2}$ и $\mathbf{z_2}$ этой же точки **A** и временем $\boldsymbol{t_2}$ в подвижной системе $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$.

Используя формулы (24)÷(39), можно получить однозначную связь между проекциями $\mathbf{v_{x2}}$, $\mathbf{v_{y2}}$ и $\mathbf{v_{z2}}$ скорости движения точки **A** в подвижной системе $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ на оси декартовых координат и аналогичными проекциями $\mathbf{v_{x1}}$, $\mathbf{v_{y1}}$ и $\mathbf{v_{z1}}$ скорости этой точки **A** в неподвижной системе $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

$$\mathrm{v_{x1}} = \frac{\mathrm{v_{x2}} + \mathrm{V}}{\frac{(\beta^2 - 1) \cdot \mathrm{v_{x2}}}{\beta^2 \cdot \mathrm{V}} + 1} \qquad (40)$$

$$\mathrm{v_{x2}} = \frac{\mathrm{v_{x1}} - \mathrm{V}}{\frac{(1 - \beta^2) \cdot \mathrm{v_{x1}}}{\beta^2 \cdot \mathrm{V}} + 1} \qquad (41)$$

$$\mathrm{v_{y1}} = \frac{\mathrm{v_{y2}}}{\frac{(\beta^2 - 1) \cdot \mathrm{v_{x2}}}{\beta \cdot \mathrm{V}} + \beta} \qquad (42)$$

$$\mathrm{v_{y2}} = \frac{\mathrm{v_{y1}}}{\frac{(1 - \beta^2) \cdot \mathrm{v_{x1}}}{\beta \cdot \mathrm{V}} + \beta} \qquad (43)$$

$$\mathrm{v_{z1}} = \frac{\mathrm{v_{z2}}}{\frac{(\beta^2 - 1) \cdot \mathrm{v_{x2}}}{\beta \cdot \mathrm{V}} + \beta} \qquad (44)$$

$$\mathrm{v_{z2}} = \frac{\mathrm{v_{z1}}}{\frac{(1 - \beta^2) \cdot \mathrm{v_{x1}}}{\beta \cdot \mathrm{V}} + \beta} \qquad (45)$$

Из формул (38)÷(45) может быть получена однозначная связь между проекциями $\boldsymbol{a}_{\mathbf{x2}}$, $\boldsymbol{a}_{\mathbf{y2}}$ и $\boldsymbol{a}_{\mathbf{z2}}$ ускорения точки **A** в подвижной системе $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ на оси декартовых координат и аналогичными проекциями $\boldsymbol{a}_{\mathbf{x1}}$, $\boldsymbol{a}_{\mathbf{y1}}$ и $\boldsymbol{a}_{\mathbf{z1}}$ ускорения этой точки **A** в неподвижной системе $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

$$a_{\mathrm{x1}} = \frac{a_{\mathrm{x2}}}{\beta^3 \cdot \left[\frac{(\beta^2 - 1) \cdot \mathrm{v_{x2}}}{\beta^2 \cdot \mathrm{V}} + 1\right]^3} \qquad (46)$$

$$a_{\mathrm{x2}} = \frac{a_{\mathrm{x1}}}{\beta^3 \cdot \left[\frac{(1 - \beta^2) \cdot \mathrm{v_{x1}}}{\beta^2 \cdot \mathrm{V}} + 1\right]^3} \qquad (47)$$

$$a_{y1} = \frac{\left\{a_{y2} \cdot \left[\frac{(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}}{\beta \cdot V} + \beta\right]\right\} - \frac{(\beta^2 - 1) \cdot a_{x2} \cdot v_{y2}}{\beta \cdot V}}{\left[\frac{(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}}{\beta \cdot V} + \beta\right]^3} \qquad (48)$$

$$a_{y2} = \frac{\left\{a_{y1} \cdot \left[\frac{(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}}{\beta \cdot V} + \beta\right]\right\} - \frac{(1 - \beta^2) \cdot a_{x1} \cdot v_{y1}}{\beta \cdot V}}{\left[\frac{(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}}{\beta \cdot V} + \beta\right]^3} \qquad (49)$$

$$a_{z1} = \frac{\left\{a_{z2} \cdot \left[\frac{(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}}{\beta \cdot V} + \beta\right]\right\} - \frac{(\beta^2 - 1) \cdot a_{x2} \cdot v_{z2}}{\beta \cdot V}}{\left[\frac{(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}}{\beta \cdot V} + \beta\right]^3} \qquad (50)$$

$$a_{z2} = \frac{\left\{a_{z1} \cdot \left[\frac{(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}}{\beta \cdot V} + \beta\right]\right\} - \frac{(1 - \beta^2) \cdot a_{x1} \cdot v_{z1}}{\beta \cdot V}}{\left[\frac{(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}}{\beta \cdot V} + \beta\right]^3} \qquad (51)$$

2.2. Определение особой скорости

Допустим, что существует такое значение $\mathbf{V_{хкр}}$ проекции $\mathbf{v_{x1}}$ скорости движения точки **A** в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$, которому бы соответствовало значение проекции $\mathbf{v_{x2}}$ скорости движения точки **A** в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, равное $\mathbf{V_{хкр}}$, т.е. когда:

$$v_{x1} = v_{x2} = V_{хкр} \qquad (52)$$

Подставив значение (52) в формулу (40) или (41), получим:

$$V_{хкр}^2 = \frac{\beta^2 \cdot V^2}{\beta^2 - 1} \qquad (53)$$

Из формулы (53) следует зависимость $\mathbf{V_{хкр}}$ от величины скорости **V** и коэффициента перехода **β** для любого возможного значения скорости **V**:

$$V_{хкр} = \pm \frac{\beta \cdot V}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \qquad (54)$$

В случае, если коэффициент перехода **β** имеет значение $\boldsymbol{\beta \geq 1}$, получим, что $\mathbf{V_{хкр}}$ будет иметь действительное значение и ее для дальнейшего рассмотрения запишем как:

$$V_{хкр} \; = \; v_{хкр1} = \pm \frac{\beta \cdot V}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \qquad (55)$$

где: $\mathbf{v_{хкр1}}$ - действительная величина, имеющая размерность скорости.

А в случае, если коэффициент перехода $\boldsymbol{\beta}$ имеет значение $\mathbf{0} < \boldsymbol{\beta} \leq \mathbf{1}$, получим, что $\mathbf{V_{хкр}}$ будет иметь мнимое значение (что говорит о том, что скорость движения точки в неподвижной системе отсчета никогда не может быть равна скорости этой же точки в подвижной инерциальной системе отсчета при $\mathbf{0} < \boldsymbol{\beta} \leq \mathbf{1}$) и которую для дальнейшего рассмотрения запишем как:

$$V_{хкр} \; = \; i \cdot v_{хкр2} = \pm \frac{i \cdot \beta \cdot V}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad (56)$$

где: $\mathbf{v_{хкр2}}$ - действительная величина, имеющая размерность скорости, а $\boldsymbol{i}$ равно:

$$i \; = \; \sqrt{-1} \qquad (57)$$

Из формулы (53) можно получить зависимость коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ от величины скорости $\mathbf{V}$ для любого возможного значения скорости $\mathbf{V}$:

$$\beta^2 = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{V_{хкр}^2}} \qquad (58)$$

Тогда из формулы (58) с учетом формулы (55) для коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$, имеющего значения $\boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{1}$ и который обозначим как $\boldsymbol{\beta}_{>}$, можно записать:

$$\beta_{>}^2 \; = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{v_{хкр1}^2}} \qquad (59)$$

А из формулы (58) с учетом формулы (56) для коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$, имеющего значения $\mathbf{0} < \boldsymbol{\beta} \leq \mathbf{1}$ и который обозначим как $\boldsymbol{\beta}_{<}$, можно записать:

$$\beta_<^2 = \frac{1}{1+\frac{V^2}{v_{\text{xкр}2}^2}} \qquad (60)$$

2.3. Уравнение связи для коэффициентов перехода

Рассмотрим три инерциальные системы отсчета: неподвижную $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижные $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ и $\mathbf{O_3x_3y_3z_3}$, показанные на рис. 2 и у которых:

- сходные оси декартовых координат систем $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$, $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ и $\mathbf{O_3x_3y_3z_3}$ попарно параллельны и одинаково направлены;
- система $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ движется относительно системы $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ с постоянной скоростью $\mathbf{V_2}$ относительно оси $\mathbf{Ox_1}$;
- система $\mathbf{O_3x_3y_3z_3}$ движется относительно системы $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ с постоянной скоростью $\mathbf{V_3}$ относительно оси $\mathbf{Ox_1}$;
- в качестве начала отсчета времени ($\mathbf{t_1}$=0 , $\mathbf{t_2}$=0 и $\mathbf{t_3}$=0) в этих трех системах выбран тот момент, когда их начала координат $\mathbf{O_1}$, $\mathbf{O_2}$ и $\mathbf{O_3}$ совпадают.

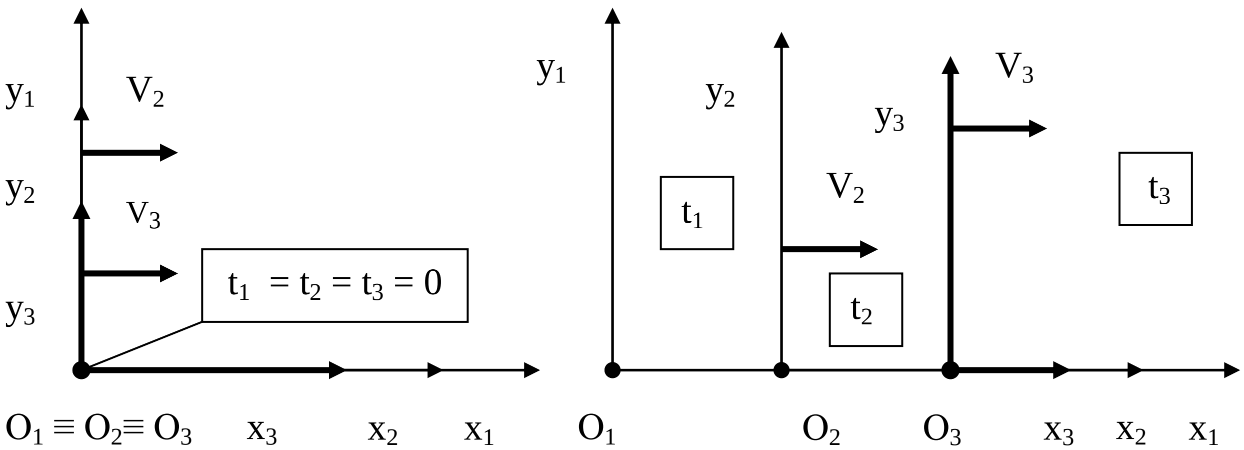

Рис. 2

Опираясь на формулу (41), можно определить значение скорости $\mathbf{V_{23}}$ движения точки $\mathbf{O_3}$ относительно точки $\mathbf{O_2}$:

$$V_{23} = \frac{V_3 - V_2}{\frac{(1 - \beta_2^2) \cdot V_3}{\beta_2^2 \cdot V_2} + 1} \qquad (61)$$

и значение скорости $\mathbf{V_{32}}$ движения точки $\mathbf{O_2}$ относительно точки $\mathbf{O_3}$:

$$V_{32} = \frac{V_2 - V_3}{\frac{(1 - \beta_3^2) \cdot V_2}{\beta_3^2 \cdot V_3} + 1} \qquad (62)$$

где: $\boldsymbol{\beta_2}$ и $\boldsymbol{\beta_3}$ - коэффициенты перехода для инерциальных систем отсчета, движущихся относительно неподвижной системы отсчета со скоростью $\mathbf{V_2}$ и $\mathbf{V_3}$, соответственно.

Используя принцип относительности, согласно которому точка $\mathbf{O_3}$ будет удаляться относительно точки $\mathbf{O_2}$ со скоростью, равной по абсолютной величине и противоположно направленной скорости, с которой точка $\mathbf{O_2}$ удаляется относительно точки $\mathbf{O_3}$, т.е.:

$$V_{32} = - V_{23} \qquad (63)$$

Подставив уравнение (63) в формулы (61) и (62), получим:

$$\frac{(1 - \beta_2^2) \cdot V_3}{\beta_2^2 \cdot V_2} + 1 = \frac{(1 - \beta_3^2) \cdot V_2}{\beta_3^2 \cdot V_3} + 1 \qquad (64)$$

Отсюда уравнение для коэффициентов перехода $\boldsymbol{\beta_2}$ и $\boldsymbol{\beta_3}$ запишется следующим образом:

$$\beta_3^2 = \frac{\beta_2^2 \cdot V_2^2}{V_3^2 - (\beta_2^2 \cdot V_3^2) + (\beta_2^2 \cdot V_2^2)} \qquad (65)$$

2.4. Получение зависимости для коэффициента перехода β

Из уравнения (64) можно получить формулу:

$$\frac{\beta_2^2 - 1}{\beta_2^2 \cdot V_2^2} = \frac{\beta_3^2 - 1}{\beta_3^2 \cdot V_3^2} \qquad (66)$$

Так как величины коэффициентов перехода $\boldsymbol{\beta_2}$ и $\boldsymbol{\beta_3}$ не зависят друг от друга, а зависят только от величин скоростей $\mathbf{V_2}$ и $\mathbf{V_3}$, соответственно, и величины скоростей $\mathbf{V_2}$ и $\mathbf{V_3}$ задавались произвольно (также не зависят друг от друга), то можно сказать, что:

$$\frac{\beta_2^2 - 1}{\beta_2^2 \cdot V_2^2} = \frac{\beta_3^2 - 1}{\beta_3^2 \cdot V_3^2} = К = Const \qquad (67)$$

т.е. получается в общем виде, что:

$$\frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 \cdot V^2} = К = Const \qquad (68)$$

где: **К** - постоянная величина, независящая от величины скорости **V** (**V_2** и **V_3**) и величины коэффициента перехода **β** (**β_2** и **β_3**) и имеющая размерность, обратную квадрату скорости.

Как видно из формулы (68), в зависимости от величины константы **К** коэффициент перехода **β** может иметь следующие значения:

- при **К = 0** коэффициент перехода **β** будет равен 1,

- если константа **К** имеет действительное положительное значение, то коэффициент перехода **β** будет больше или равен 1, т.е. **$\beta \geq 1$**,

- если константа **К** имеет действительное отрицательное значение, то коэффициент перехода **β** будет меньше или равен 1, т.е. **$0 < \beta \leq 1$**.

Но так как константа **К** не зависит от величины скорости **V** и величины коэффициента перехода **β**, то для любого конкретного значения величины скорости **V** получается, что константа **К** не может быть одновременно величиной положительной величиной и отрицательной, т.е. для всех возможных значений скорости **V** значения коэффициента перехода **β** могут находиться только в диапазоне **$\beta \geq 1$** или только в диапазоне **$0 < \beta \leq 1$**.

Одним словом, **$\beta \geq 1$** и **$0 < \beta \leq 1$** являются двумя взаимоисключающими диапазонами коэффициента перехода **β**, т.е. все значения коэффициента перехода **β** в зависимости от величины скорости **V** находятся только в диапазоне **$\beta \geq 1$** или в диапазоне **$0 < \beta \leq 1$**.

Основная задача заключается в выборе одного из этих двух диапазонов, в котором будет в действительности определяться величина коэффициента перехода **β** в зависимости от величины скорости **V** (если **β** зависит от **V**).

Из уравнения (68) можно получить формулу для коэффициента перехода **β**:

$$\beta^2 = \frac{1}{1-(\mathrm{K}\cdot \mathrm{V}^2)} \qquad (69)$$

Если вернуться к формуле (58):

$$\beta^2 = \frac{1}{1-\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{V}^2_{\text{хкр}}}} \qquad (58)$$

и сравнить ее с формулой (69), то можно отметить, что:

$$\mathrm{K} = \frac{1}{\mathrm{V}^2_{\text{хкр}}} \qquad (70)$$

т.е. $\mathbf{V}_{\text{хкр}}^{2}$ будет являться постоянной величиной, не зависящей от значений скорости **V** и коэффициента перехода **β**.

Опираясь на формулы (69) и (70), можно сказать, что в случае, когда коэффициент перехода **β** не равен **1**, должна существовать такая величина скорости $\mathbf{V}_{\text{хкр}}$ (действительная или мнимая) движения точки, которая была бы инвариантна во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета.

Исходя из формулы (69), в формулах для коэффициента перехода **β**:

- при **β ≥ 1**:

$$\beta^2_{>} = \frac{1}{1-\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}^2_{\text{хкр1}}}} \qquad (59)$$

- при **0<β≤ 1**:

$$\beta^2_{<} = \frac{1}{1+\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}^2_{\text{хкр2}}}} \qquad (60)$$

величины $\mathbf{v}_{\text{хкр1}}$ и $\mathbf{v}_{\text{хкр2}}$ будут постоянными величинами, не зависящими от величины скорости **V** и коэффициента перехода **β**, т.е.:

$$\mathrm{v}_{\text{хкр1}} = Const \qquad (71)$$

$$\mathrm{v}_{\text{хкр2}} = Const \tag{72}$$

Граничное условие (при значении скорости **V**, равной **0**, коэффициент перехода **β** равен **1**) устанавливает, что при стремлении величины скорости **V** к **0** коэффициент перехода **β** стремится к **1,** а это, согласно формулам (59) и (60), позволяет отметить, что:

$$\mathrm{v}_{\text{хкр1}} \neq 0 \tag{73}$$

$$\mathrm{v}_{\text{хкр2}} \neq 0 \tag{74}$$

А в случае, когда коэффициент перехода **β** не зависит от величины скорости **V** (т.е. при значении коэффициента перехода **β = Const = 1**), то:

$$\mathrm{v}_{\text{хкр1}} = \infty \tag{75}$$

$$\mathrm{v}_{\text{хкр2}} = \infty \tag{76}$$

2.5. Основные кинематические уравнения «специальной теории относительности в общем виде»

Подставив формулу (58) в уравнения (34), (35), (38)÷(39), (40)÷(45) и (46)÷(51), получим следующую систему уравнений:

$$\mathrm{x}_1 = \frac{\mathrm{x}_2 + (\mathrm{V} \cdot t_2)}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{V}_{\text{хкр}}^2}}} \tag{77}$$

$$\mathrm{x}_2 = \frac{\mathrm{x}_1 - (\mathrm{V} \cdot t_1)}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{V}_{\text{хкр}}^2}}} \tag{78}$$

$$t_1 = \frac{t_2 + \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{x}_2}{\mathrm{V}_{\text{хкр}}^2}}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{V}_{\text{хкр}}^2}}} \tag{79}$$

$$t_2 = \frac{t_1 - \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{x}_1}{\mathrm{V}_{\text{xкр}}^2}}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{V}_{\text{xкр}}^2}}} \tag{80}$$

$$\mathrm{v}_{\mathrm{x}1} = \frac{\mathrm{v}_{\mathrm{x}2} + \mathrm{V}}{1 + \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{v}_{\mathrm{x}2}}{\mathrm{V}_{\text{xкр}}^2}} \tag{81}$$

$$\mathrm{v}_{\mathrm{x}2} = \frac{\mathrm{v}_{\mathrm{x}1} - \mathrm{V}}{1 - \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{v}_{\mathrm{x}1}}{\mathrm{V}_{\text{xкр}}^2}} \tag{82}$$

$$\mathrm{v}_{\mathrm{y}1} = \frac{\mathrm{v}_{\mathrm{y}2} \cdot \sqrt{1 - \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{V}_{\text{xкр}}^2}}}{1 + \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{v}_{\mathrm{x}2}}{\mathrm{V}_{\text{xкр}}^2}} \tag{83}$$

$$\mathrm{v}_{\mathrm{y}2} = \frac{\mathrm{v}_{\mathrm{y}1} \cdot \sqrt{1 - \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{V}_{\text{xкр}}^2}}}{1 - \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{v}_{\mathrm{x}1}}{\mathrm{V}_{\text{xкр}}^2}} \tag{84}$$

$$\mathrm{v}_{\mathrm{z}1} = \frac{\mathrm{v}_{\mathrm{z}2} \cdot \sqrt{1 - \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{V}_{\text{xкр}}^2}}}{1 + \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{v}_{\mathrm{x}2}}{\mathrm{V}_{\text{xкр}}^2}} \tag{85}$$

$$\mathrm{v}_{\mathrm{z}2} = \frac{\mathrm{v}_{\mathrm{z}1} \cdot \sqrt{1 - \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{V}_{\text{xкр}}^2}}}{1 - \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{v}_{\mathrm{x}1}}{\mathrm{V}_{\text{xкр}}^2}} \tag{86}$$

$$a_{\mathrm{x}1} = \frac{a_{\mathrm{x}2} \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{V}_{\text{xкр}}^2}}\right)^3}{\left(1 + \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{v}_{\mathrm{x}2}}{\mathrm{V}_{\text{xкр}}^2}\right)^3} \tag{87}$$

$$a_{x2} = \frac{a_{x1} \cdot \left(\sqrt{1-\frac{V^2}{V_{xкр}^2}}\right)^3}{\left(1-\frac{V \cdot v_{x1}}{V_{xкр}^2}\right)^3} \qquad (88)$$

$$a_{y1} = \frac{\left\{\left[a_{y2} \cdot \left(1+\frac{V \cdot v_{x2}}{V_{xкр}^2}\right)\right] - \frac{V \cdot a_{x2} \cdot v_{y2}}{V_{xкр}^2}\right\} \cdot \left(1-\frac{V^2}{V_{xкр}^2}\right)}{\left(1+\frac{V \cdot v_{x2}}{V_{xкр}^2}\right)^3} \qquad (89)$$

$$a_{y2} = \frac{\left\{\left[a_{y1} \cdot \left(1-\frac{V \cdot v_{x1}}{V_{xкр}^2}\right)\right] + \frac{V \cdot a_{x1} \cdot v_{y1}}{V_{xкр}^2}\right\} \cdot \left(1-\frac{V^2}{V_{xкр}^2}\right)}{\left(1-\frac{V \cdot v_{x1}}{V_{xкр}^2}\right)^3} \qquad (90)$$

$$a_{z1} = \frac{\left\{\left[a_{z2} \cdot \left(1+\frac{V \cdot v_{x2}}{V_{xкр}^2}\right)\right] - \frac{V \cdot a_{x2} \cdot v_{z2}}{V_{xкр}^2}\right\} \cdot \left(1-\frac{V^2}{V_{xкр}^2}\right)}{\left(1+\frac{V \cdot v_{x2}}{V_{xкр}^2}\right)^3} \qquad (91)$$

$$a_{z2} = \frac{\left\{\left[a_{z1} \cdot \left(1-\frac{V \cdot v_{x1}}{V_{xкр}^2}\right)\right] + \frac{V \cdot a_{x1} \cdot v_{z1}}{V_{xкр}^2}\right\} \cdot \left(1-\frac{V^2}{V_{xкр}^2}\right)}{\left(1-\frac{V \cdot v_{x1}}{V_{xкр}^2}\right)^3} \qquad (92)$$

2.6. Основные кинематические уравнения при коэффициенте перехода $\beta \geq 1$

Подставив формулу (59) в уравнения (34), (35), (38)÷(39), (40)÷(45) и (46)÷(51), получим следующую систему уравнений при коэффициенте перехода **β= β**$_{>}$:

$$x_{1>} = \frac{x_{2>} + (V \cdot t_{2>})}{\sqrt{1-\frac{V^2}{v_{xкр1}^2}}} \qquad (93)$$

$$x_{2>} = \frac{x_{1>} - (V \cdot t_{1>})}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{xкр1}^2}}} \quad (94)$$

$$t_{1>} = \frac{t_{2>} + \frac{V \cdot x_{2>}}{v_{xкр1}^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{xкр1}^2}}} \quad (95)$$

$$t_{2>} = \frac{t_{1>} - \frac{V \cdot x_{1>}}{v_{xкр1}^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{xкр1}^2}}} \quad (96)$$

$$v_{x1>} = \frac{v_{x2>} + V}{1 + \frac{V \cdot v_{x2>}}{v_{xкр1}^2}} \quad (97)$$

$$v_{x2>} = \frac{v_{x1>} - V}{1 - \frac{V \cdot v_{x1>}}{v_{xкр1}^2}} \quad (98)$$

$$v_{y1>} = \frac{v_{y2>} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{xкр1}^2}}}{1 + \frac{V \cdot v_{x2>}}{v_{xкр1}^2}} \quad (99)$$

$$v_{y2>} = \frac{v_{y1>} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{xкр1}^2}}}{1 - \frac{V \cdot v_{x1>}}{v_{xкр1}^2}} \quad (100)$$

$$\mathrm{v}_{z1>} = \frac{\mathrm{v}_{z2>} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}}}{1 + \frac{V \cdot \mathrm{v}_{x2>}}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}} \qquad (101)$$

$$\mathrm{v}_{z2>} = \frac{\mathrm{v}_{z1>} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}}}{1 - \frac{V \cdot \mathrm{v}_{x1>}}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}} \qquad (102)$$

$$a_{x1>} = \frac{a_{x2>} \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{V^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}}\right)^3}{\left(1 + \frac{V \cdot \mathrm{v}_{x2>}}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}\right)^3} \qquad (103)$$

$$a_{x2>} = \frac{a_{x1>} \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{V^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}}\right)^3}{\left(1 - \frac{V \cdot \mathrm{v}_{x1>}}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}\right)^3} \qquad (104)$$

$$a_{y1>} = \frac{\left\{\left[a_{y2>} \cdot \left(1 + \frac{V \cdot \mathrm{v}_{x2>}}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}\right)\right] - \frac{V \cdot a_{x2>} \cdot \mathrm{v}_{y2>}}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}\right\} \cdot \left(1 - \frac{V^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}\right)}{\left(1 + \frac{V \cdot \mathrm{v}_{x2>}}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}\right)^3} \qquad (105)$$

$$a_{y2>} = \frac{\left\{\left[a_{y1>} \cdot \left(1 - \frac{V \cdot \mathrm{v}_{x1>}}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}\right)\right] + \frac{V \cdot a_{x1>} \cdot \mathrm{v}_{y1>}}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}\right\} \cdot \left(1 - \frac{V^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}\right)}{\left(1 - \frac{V \cdot \mathrm{v}_{x1>}}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}\right)^3} \qquad (106)$$

$$a_{z1>} = \frac{\left\{\left[a_{z2>} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{v}_{x2>}}{\mathrm{v}_{xкр1}^2}\right)\right] - \frac{\mathrm{V} \cdot a_{x2>} \cdot \mathrm{v}_{z2>}}{\mathrm{v}_{xкр1}^2}\right\} \cdot \left(1 - \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}_{xкр1}^2}\right)}{\left(1 + \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{v}_{x2>}}{\mathrm{v}_{xкр1}^2}\right)^3} \quad (107)$$

$$a_{z2>} = \frac{\left\{\left[a_{z1>} \cdot \left(1 - \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{v}_{x1>}}{\mathrm{v}_{xкр1}^2}\right)\right] + \frac{\mathrm{V} \cdot a_{x1>} \cdot \mathrm{v}_{z1>}}{\mathrm{v}_{xкр1}^2}\right\} \cdot \left(1 - \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}_{xкр1}^2}\right)}{\left(1 - \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{v}_{x1>}}{\mathrm{v}_{xкр1}^2}\right)^3} \quad (108)$$

2.7. Основные кинематические уравнения при коэффициенте перехода 0 < β < 1

Подставив формулу (60) в уравнения (34), (35), (38)÷(39), (40)÷(45) и (46)÷(51), получим систему уравнений для случая, когда коэффициент перехода **β = β**$_<$:

$$\mathrm{x}_{1<} = \frac{\mathrm{x}_{2<} + (\mathrm{V} \cdot t_{2<})}{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}_{xкр2}^2}}} \quad (109)$$

$$\mathrm{x}_{2<} = \frac{\mathrm{x}_{1<} - (\mathrm{V} \cdot t_{1<})}{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}_{xкр2}^2}}} \quad (110)$$

$$t_{1<} = \frac{t_{2<} - \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{x}_{2<}}{\mathrm{v}_{xкр2}^2}}{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}_{xкр2}^2}}} \quad (111)$$

$$t_{2<} = \frac{t_{1<} + \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{x}_{1<}}{\mathrm{v}_{xкр2}^2}}{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}_{xкр2}^2}}} \quad (112)$$

$$\mathrm{v}_{x1<} = \frac{\mathrm{v}_{x2<} + \mathrm{V}}{1 - \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{v}_{x2<}}{\mathrm{v}_{xкр2}^2}} \quad (113)$$

$$\mathrm{v}_{\mathrm{x}2<} = \frac{\mathrm{v}_{\mathrm{x}1<} - \mathrm{V}}{1 + \dfrac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{v}_{\mathrm{x}1<}}{\mathrm{v}_{\mathrm{xкр}2}^2}} \tag{114}$$

$$\mathrm{v}_{\mathrm{y}1<} = \frac{\mathrm{v}_{\mathrm{y}2<} \cdot \sqrt{1 + \dfrac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}_{\mathrm{xкр}2}^2}}}{1 - \dfrac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{v}_{\mathrm{x}2<}}{\mathrm{v}_{\mathrm{xкр}2}^2}} \tag{115}$$

$$\mathrm{v}_{\mathrm{y}2<} = \frac{\mathrm{v}_{\mathrm{y}1<} \cdot \sqrt{1 + \dfrac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}_{\mathrm{xкр}2}^2}}}{1 + \dfrac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{v}_{\mathrm{x}1<}}{\mathrm{v}_{\mathrm{xкр}2}^2}} \tag{116}$$

$$\mathrm{v}_{\mathrm{z}1<} = \frac{\mathrm{v}_{\mathrm{z}2<} \cdot \sqrt{1 + \dfrac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}_{\mathrm{xкр}2}^2}}}{1 - \dfrac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{v}_{\mathrm{x}2<}}{\mathrm{v}_{\mathrm{xкр}2}^2}} \tag{117}$$

$$\mathrm{v}_{\mathrm{z}2<} = \frac{\mathrm{v}_{\mathrm{z}1<} \cdot \sqrt{1 + \dfrac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}_{\mathrm{xкр}2}^2}}}{1 + \dfrac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{v}_{\mathrm{x}1<}}{\mathrm{v}_{\mathrm{xкр}2}^2}} \tag{118}$$

$$a_{\mathrm{x}1<} = \frac{a_{\mathrm{x}2<} \cdot \left(\sqrt{1 + \dfrac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}_{\mathrm{xкр}1}^2}}\right)^3}{\left(1 - \dfrac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{v}_{\mathrm{x}2<}}{\mathrm{v}_{\mathrm{xкр}1}^2}\right)^3} \tag{119}$$

$$a_{x2<} = \frac{a_{x1<} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{xкр2}^2}}\right)^3}{\left(1 + \frac{V \cdot v_{x1<}}{v_{xкр2}^2}\right)^3} \qquad (120)$$

$$a_{y1<} = \frac{\left\{\left[a_{y2<} \cdot \left(1 - \frac{V \cdot v_{x2<}}{v_{xкр2}^2}\right)\right] + \frac{V \cdot a_{x2<} \cdot v_{y2<}}{v_{xкр2}^2}\right\} \cdot \left(1 + \frac{V^2}{v_{xкр2}^2}\right)}{\left(1 - \frac{V \cdot v_{x2<}}{v_{xкр2}^2}\right)^3} \qquad (121)$$

$$a_{y2<} = \frac{\left\{\left[a_{y1<} \cdot \left(1 + \frac{V \cdot v_{x1<}}{v_{xкр2}^2}\right)\right] - \frac{V \cdot a_{x1<} \cdot v_{y1<}}{v_{xкр2}^2}\right\} \cdot \left(1 + \frac{V^2}{v_{xкр2}^2}\right)}{\left(1 + \frac{V \cdot v_{x1<}}{v_{xкр2}^2}\right)^3} \qquad (122)$$

$$a_{z1<} = \frac{\left\{\left[a_{z2<} \cdot \left(1 - \frac{V \cdot v_{x2<}}{v_{xкр2}^2}\right)\right] + \frac{V \cdot a_{x2<} \cdot v_{z2<}}{v_{xкр2}^2}\right\} \cdot \left(1 + \frac{V^2}{v_{xкр2}^2}\right)}{\left(1 - \frac{V \cdot v_{x2<}}{v_{xкр2}^2}\right)^3} \qquad (123)$$

$$a_{z2<} = \frac{\left\{\left[a_{z1<} \cdot \left(1 + \frac{V \cdot v_{x1<}}{v_{xкр2}^2}\right)\right] - \frac{V \cdot a_{x1<} \cdot v_{z1<}}{v_{xкр2}^2}\right\} \cdot \left(1 + \frac{V^2}{v_{xкр2}^2}\right)}{\left(1 + \frac{V \cdot v_{x1<}}{v_{xкр2}^2}\right)^3} \qquad (124)$$

К сожалению, из кинематических уравнений связи определить значение постоянной величины $\mathbf{V_{xкр}}$ ($\mathbf{v_{xкр1}}$ или $\mathbf{v_{xкр2}}$) невозможно, поэтому придется обратиться за помощью к динамике.

3. Динамика

Для установления зависимости массы движущегося тела от скорости воспользуемся - с одной стороны - принципом относительности, утверждающим, что физические законы инвариантны по отношению к выбору инерциальной системы отсчета, т.е. уравнения, выражающие эти законы, имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета.

С другой стороны - постараемся опереться на ограничительные условия к пространству и времени, которые устанавливаются в специальной теории относительности.

Этими условиями являются однородность и изотропность пространства и однородность времени, т.е. симметрия пространства и времени.

Согласно теореме Эммы Нетер симметрии действия соответствует закон сохранения этого действия.

Теорема Эммы Нетер позволяет установить, что:

- закон сохранения механической энергии связан со свойством симметрии времени – однородностью времени (это свойство времени проявляется в том, что законы движения замкнутой системы не зависят от выбора начала отсчета времени);

- закон сохранения импульса связан со свойством симметрии пространства – однородностью пространства (это свойство проявляется в том, что физические свойства замкнутой системы и законы ее движения не зависят от выбора положения начала координат инерциальной системы отсчета, т.е. не изменяются при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы как целого);

- закон сохранения момента импульса связан со свойством симметрии пространства – изотропностью пространства (это свойство пространства проявляется в том, что физические свойства и законы движения замкнутой системы не зависят от выбора направления осей координат инерциальной системы отсчета, т.е. не изменяются при повороте в пространстве замкнутой системы как целого на любой угол).

3.1. Системы уравнений для определения зависимости массы движущегося тела от скорости

Для определения зависимости массы движущегося тела от его скорости перемещения воспользуемся:

- законом сохранения импульса: **импульс замкнутой механической системы тел (на которую не действуют внешние силы) для любого момента времени является величиной постоянной**;

- законом сохранения механической энергии: **механическая энергия консервативной механической системы тел (у которой все внутренние силы потенциальны, а внешние силы потенциальны и стационарны) для любого момента времени является величиной постоянной**, который для замкнутых механических систем принимает вид: **механическая энергия замкнутой механической системы не изменяется с течением времени, если все внутренние силы, действующие в этой системе, потенциальны**, а точнее - его частным случаем, когда у тел, составляющих замкнутую механическую систему, не происходит изменение потенциальной энергии (в том числе, когда тела, составляющие замкнутую механическую систему, испытывают только абсолютно упругие взаимодействия): **кинетическая энергия замкнутой механической системы тел для любого момента времени является величиной постоянной**.

Допустим, что зависимость массы тела от скорости его движения не меняется при изменении потенциальной энергии тела.

Предположим, что масса **M(V)** материальной точки, движущейся со скоростью **V**, равна:

$$M(V) = M_0 \cdot f(V) \qquad (125)$$

где: $\mathbf{M_0}$ – масса рассматриваемой материальной точки в состоянии покоя;

f(V) – функция, предположительно зависящая от величины скорости **V**.

Исходя из формулы (125), импульс **P(V)** материальной точки, движущейся со скоростью **V**, равен:

$$P(V) = M_0 \cdot f(V) \cdot V \qquad (126)$$

А формула (126) позволяет записать следующее уравнение для кинетической энергии $\mathbf{E_к(V)}$ материальной точки, движущейся со скоростью **V**:

$$E_k(V) = M_0 \cdot \int_0^V \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \qquad (127)$$

где: $\mathbf{f'(V)}$ – производная функции $\mathbf{f(V)}$.

Постараемся установить зависимость массы (функции $\mathbf{f(V)}$) движущегося тела от скорости его перемещения, рассмотрев взаимодействия (а точнее результаты взаимодействия) тел (материальных точек), составляющих замкнутую механическую систему и перемещающихся в пространстве только линейно.

С целью написания системы уравнений, позволяющих определить значение функции $\mathbf{f(V)}$, рассмотрим два простейших примера.

3.1.1. Пример № 1

Допустим, что имеются две инерциальные системы отсчета, аналогичные системам отсчета, изображенным на рис. 1, - неподвижная $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижная $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, которая движется со скоростью **V** параллельно оси $\mathbf{O_1x_1}$ относительно системы $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$.

Предположим, что имеется замкнутая механическая система тел, состоящая из тела 1 и тела 2 (как показано на рис. 3) имеющих массы в состоянии покоя, равные $\mathbf{M_{o1}}$ и $\mathbf{M_{o2}}$ соответственно.

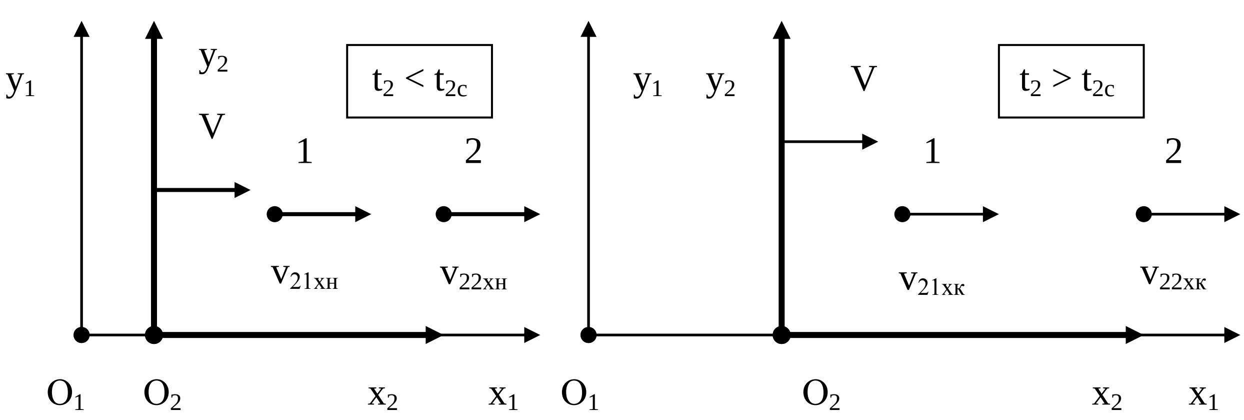

Рис. 3

В подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ тело 1 и тело 2 до некоторого момента времени $\boldsymbol{t_{2c}}$ двигались параллельно оси $\mathbf{O_2x_2}$ по одной линии с постоянными по величине скоростями $\mathbf{v_{21хн}}$ и $\mathbf{v_{22хн}}$ соответственно.

В какой-то момент времени $\boldsymbol{t_{2c}}$ между телами 1 и 2 произошло абсолютно упругое прямое центральное столкновение.

Далее после столкновения в момент времени больший $\mathbf{t_{2c}}$ тела 1 и 2 стали двигаться параллельно оси $\mathbf{O_2x_2}$ по одной линии с постоянными по величине скоростями $\mathbf{v_{21хк}}$ и $\mathbf{v_{22хк}}$ соответственно.

Учитывая, что между телами 1 и 2 имело место прямое центральное столкновение, и рассматривая их как материальные точки, запишем закон сохранения импульса для замкнутой механической системы тел 1 и 2 в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ для моментов времени меньшего и большего, чем $\boldsymbol{t_{2c}}$:

$$[\mathrm{M}_{01} \cdot \mathrm{f}(\mathrm{V} = \mathrm{v}_{21\text{хн}}) \cdot \mathrm{v}_{21\text{хн}}] + [\mathrm{M}_{02} \cdot \mathrm{f}(\mathrm{V} = \mathrm{v}_{22\text{хн}}) \cdot \mathrm{v}_{22\text{хн}}] =$$
$$= [\mathrm{M}_{01} \cdot \mathrm{f}(\mathrm{V} = \mathrm{v}_{21\text{хк}}) \cdot \mathrm{v}_{21\text{хк}}] + [\mathrm{M}_{02} \cdot \mathrm{f}(\mathrm{V} = \mathrm{v}_{22\text{хк}}) \cdot \mathrm{v}_{22\text{хк}}] \qquad (128)$$

А опираясь на то, что столкновение тел 1 и 2 носило абсолютно упругий характер, можно записать закон сохранения механической энергии для замкнутой механической системы тел 1 и 2 в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ для моментов времени меньшего и большего, чем $\boldsymbol{t_{2c}}$, предполагая, что величины потенциальных энергий тел 1 и 2 остаются неизменными до и после столкновения:

$$\langle \mathrm{M}_{01} \cdot \int_{0}^{\mathrm{v}_{21\text{хн}}} \{[\mathrm{f}(\mathrm{V}) \cdot \mathrm{V}] + [\mathrm{f}'(\mathrm{V}) \cdot \mathrm{V}^2]\} \cdot \mathrm{dV} \rangle +$$

$$+ \langle \mathrm{M}_{02} \cdot \int_{0}^{\mathrm{v}_{22\text{хн}}} \{[\mathrm{f}(\mathrm{V}) \cdot \mathrm{V}] + [\mathrm{f}'(\mathrm{V}) \cdot \mathrm{V}^2]\} \cdot \mathrm{dV} \rangle =$$

$$= \langle \mathrm{M}_{01} \cdot \int_{0}^{\mathrm{v}_{21\text{хк}}} \{[\mathrm{f}(\mathrm{V}) \cdot \mathrm{V}] + [\mathrm{f}'(\mathrm{V}) \cdot \mathrm{V}^2]\} \cdot \mathrm{dV} \rangle +$$

$$+\langle M_{02}\cdot\int_0^{v_{22хк}}\{[f(V)\ \cdot\ V]+[f'(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\rangle \qquad (129)$$

Все ранее сказанное о движении тел 1 и 2 в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ можно сказать и о движении тел 1 и 2 в неподвижной системе отчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$, за исключением того, что:

- столкновение между телами 1 и 2 происходит в момент времени $\boldsymbol{t_{1c}}$, соответствующий моменту времени $\boldsymbol{t_{2c}}$ в системе $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$,

- тело 1 имеет соответственно до и после столкновения скорости $\mathbf{v_{11хн}}$ и $\mathbf{v_{11хк}}$, соответствующие скоростям $\mathbf{v_{21хн}}$ и $\mathbf{v_{21хк}}$,

- тело 2 имеет соответственно до и после столкновения скорости $\mathbf{v_{12хн}}$ и $\mathbf{v_{12хк}}$, соответствующие скоростям $\mathbf{v_{22хн}}$ и $\mathbf{v_{22хк}}$.

Аналогично формулам (128) и (129) можно записать закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии для замкнутой механической системы тел 1 и 2 в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ для моментов времени меньшего и большего, чем $\mathbf{t_{1c}}$, также предполагая, что величины потенциальных энергий тел 1 и 2 остаются неизменными до и после столкновения:

$$[M_{01}\cdot f(V=v_{11хн})\cdot v_{11хн}]+[M_{02}\cdot f(V=v_{12хн})\cdot v_{12хн}]=$$
$$=[M_{01}\cdot f(V=v_{11хк})\cdot v_{11хк}]+[M_{02}\cdot f(V=v_{12хк})\cdot v_{12хк}] \qquad (130)$$

$$\langle M_{01}\cdot\int_0^{v_{11хн}}\{[f(V)\ \cdot\ V]+[f'(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\rangle\ +$$

$$+\langle M_{02}\cdot\int_0^{v_{12хн}}\{[f(V)\ \cdot\ V]+[f'(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\rangle\ =$$

$$=\ \langle M_{01}\cdot\int_0^{v_{11хк}}\{[f(V)\ \cdot\ V]+[f'(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\rangle\ +$$

$$+\langle M_{02}\cdot\int_0^{v_{12хк}}\{[f(V)\ \cdot\ V]+[f'(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\rangle \qquad (131)$$

3.1.2. Пример № 2

Пример № 2 подобен примеру № 1 и отличается от него только тем, что в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ тела 1 и тела 2 двигаются не параллельно оси $\mathbf{O_2x_2}$, а параллельно оси $\mathbf{O_2y_2}$, как показано на рис. 4.

В подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ тела 1 и тела 2 до некоторого момента времени $\boldsymbol{t_{2c}}$ двигались параллельно оси $\mathbf{O_2y_2}$ по одной линии с постоянными по величине скоростями $\mathbf{v_{21ун}}$ и $\mathbf{v_{22ун}}$ соответственно.

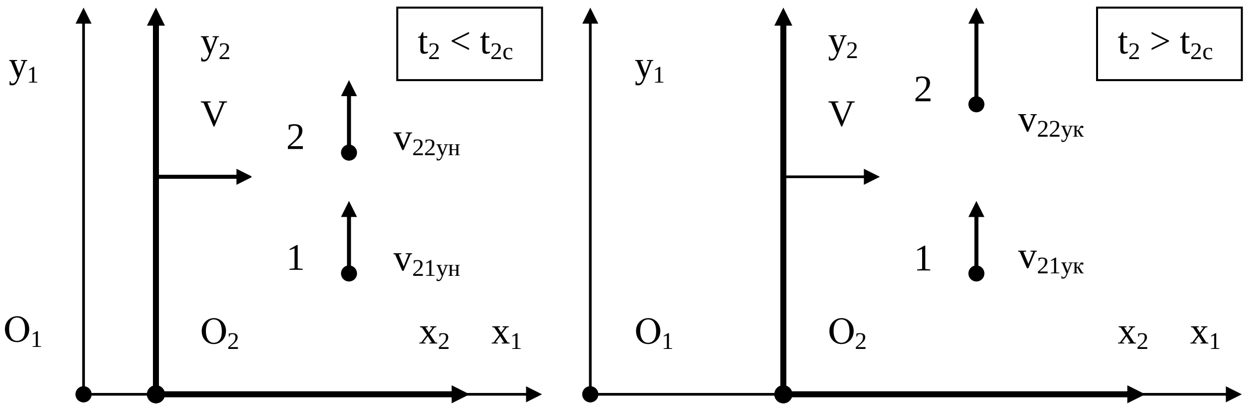

Рис. 4

После столкновения в момент времени больший $\boldsymbol{t_{2c}}$ тела 1 и 2 стали двигаться параллельно оси $\mathbf{O_2y_2}$ по одной линии с постоянными по величине скоростями $\mathbf{v_{21ук}}$ и $\mathbf{v_{22ук}}$ соответственно.

Тогда можно записать закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии для замкнутой механической системы тел 1 и 2 в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ для моментов времени меньшего и большего, чем $\boldsymbol{t_{2c}}$, предполагая, что величины потенциальных энергий тел 1 и 2 остаются неизменными до и после столкновения:

$$\left[\mathrm{M_{01}} \cdot \mathrm{f}\left(\mathrm{V} = \mathrm{v_{21ун}}\right) \cdot \mathrm{v_{21ун}}\right] + \left[\mathrm{M_{02}} \cdot \mathrm{f}\left(\mathrm{V} = \mathrm{v_{22ун}}\right) \cdot \mathrm{v_{22ун}}\right] =$$
$$= \left[\mathrm{M_{01}} \cdot \mathrm{f}\left(\mathrm{V} = \mathrm{v_{21ук}}\right) \cdot \mathrm{v_{21ук}}\right] + \left[\mathrm{M_{02}} \cdot \mathrm{f}\left(\mathrm{V} = \mathrm{v_{22ук}}\right) \cdot \mathrm{v_{22ук}}\right] \qquad (132)$$

$$\langle \mathrm{M_{01}} \cdot \int_0^{\mathrm{v_{21ун}}} \{[\mathrm{f}(\mathrm{V}) \cdot \mathrm{V}] + [\mathrm{f}'(\mathrm{V}) \cdot \mathrm{V}^2]\} \cdot \mathrm{dV} \rangle +$$

$$+\langle M_{02}\cdot\int\limits_{0}^{v_{22ун}}\{[f(V)\ \cdot\ V]+[f'(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\rangle\ =$$

$$=\ \langle M_{01}\cdot\int\limits_{0}^{v_{21ук}}\{[f(V)\ \cdot\ V]+[f'(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\rangle\ +$$

$$+\langle M_{02}\cdot\int\limits_{0}^{v_{22ук}}\{[f(V)\ \cdot\ V]+[f'(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\rangle \qquad (133)$$

Учитывая, что о движении тел 1 и 2 в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ в отличие от их движения в неподвижной системе отчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ можно сказать, что:

- столкновение между телами 1 и 2 происходит в момент времени $\boldsymbol{t_{1c}}$, соответствующий моменту времени $\boldsymbol{t_{2c}}$ в системе $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$,

- тело 1 имеет соответственно до и после столкновения проекции скорости на оси координат $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$ $\mathbf{v_{11xн}} = \mathbf{V}$, $\mathbf{v_{11yн}}$, $\mathbf{v_{11xк}} = \mathbf{V}$ и $\mathbf{v_{11yк}}$, соответствующие скоростям $\mathbf{v_{21xн}}$ и $\mathbf{v_{21xк}}$,

- тело 2 имеет соответственно до и после столкновения проекции скорости на оси координат $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$ $\mathbf{v_{12xн}} = \mathbf{V}$, $\mathbf{v_{12yн}}$, $\mathbf{v_{12xк}} = \mathbf{V}$ и $\mathbf{v_{12yк}}$, соответствующие скоростям $\mathbf{v_{22xн}}$ и $\mathbf{v_{22xк}}$.

Аналогично можно записать закон сохранения импульса (два уравнения для проекций импульса на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$) и закон сохранения механической энергии для замкнутой механической системы тел 1 и 2 в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ для моментов времени меньшего и большего, чем $\boldsymbol{t_{1c}}$, предполагая, что величины потенциальных энергий тел 1 и 2 остаются неизменными до и после столкновения:

$$\left[M_{01}\cdot f\left(V=\sqrt{v_{11ун}^2+V^2}\right)\cdot V\right]+\left[M_{02}\cdot f\left(V=\sqrt{v_{12ун}^2+V^2}\right)\cdot V\right]=$$

$$=\left[M_{01}\cdot f\left(V=\sqrt{v_{11ук}^2+V^2}\right)\cdot V\right]+\left[M_{02}\cdot f\left(V=\sqrt{v_{12ук}^2+V^2}\right)\cdot V\right] \qquad (134)$$

$$\left[M_{01}\cdot f\left(V=\sqrt{v_{11ун}^2+V^2}\right)\cdot v_{11ун}\right]+\left[M_{02}\cdot f\left(V=\sqrt{v_{12ун}^2+V^2}\right)\cdot v_{12ун}\right]=$$

$$= \left[M_{01} \cdot f\left(V = \sqrt{v_{11ук}^2 + V^2}\right) \cdot v_{11ук}\right] +$$

$$+ \left[M_{02} \cdot f\left(V = \sqrt{v_{12ук}^2 + V^2}\right) \cdot v_{12ук}\right] \qquad (135)$$

$$\langle M_{01} \cdot \int_0^{\sqrt{v_{11ун}^2+V^2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\rangle +$$

$$+ \langle M_{02} \cdot \int_0^{\sqrt{v_{12ун}^2+V^2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\rangle =$$

$$= \langle M_{01} \cdot \int_0^{\sqrt{v_{11ук}^2+V^2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\rangle +$$

$$+ \langle M_{02} \cdot \int_0^{\sqrt{v_{12ук}^2+V^2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\rangle \qquad (136)$$

3.1.3. Зависимость массы движущегося тела от скорости

С целью определения зависимости для массы движущегося тела составим следующую систему уравнений:

$$[M_{01} \cdot f(V = v_{21хн}) \cdot v_{21хн}] + [M_{02} \cdot f(V = v_{22хн}) \cdot v_{22хн}] =$$

$$= [M_{01} \cdot f(V = v_{21хк}) \cdot v_{21хк}] + [M_{02} \cdot f(V = v_{22хк}) \cdot v_{22хк}] \qquad (128)$$

$$\langle M_{01} \cdot \int_0^{v_{21хн}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\rangle +$$

$$+ \langle M_{02} \cdot \int_0^{v_{22хн}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\rangle =$$

$$= \langle M_{01} \cdot \int_0^{v_{21хк}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\rangle +$$

$$+\langle \mathrm{M}_{02}\cdot\int_{0}^{\mathrm{v}_{22\text{хк}}}\{[\mathrm{f}(\mathrm{V})\ \cdot\ \mathrm{V}]+[\mathrm{f}'(\mathrm{V})\cdot\mathrm{V}^2]\}\cdot\mathrm{dV}\rangle \tag{129}$$

$$[\mathrm{M}_{01}\cdot\mathrm{f}(\mathrm{V}=\mathrm{v}_{11\text{хн}})\cdot\mathrm{v}_{11\text{хн}}]+[\mathrm{M}_{02}\cdot\mathrm{f}(\mathrm{V}=\mathrm{v}_{12\text{хн}})\cdot\mathrm{v}_{12\text{хн}}]=$$
$$=[\mathrm{M}_{01}\cdot\mathrm{f}(\mathrm{V}=\mathrm{v}_{11\text{хк}})\cdot\mathrm{v}_{11\text{хк}}]+[\mathrm{M}_{02}\cdot\mathrm{f}(\mathrm{V}=\mathrm{v}_{12\text{хк}})\cdot\mathrm{v}_{12\text{хк}}] \tag{130}$$

$$\langle \mathrm{M}_{01}\cdot\int_{0}^{\mathrm{v}_{11\text{хн}}}\{[\mathrm{f}(\mathrm{V})\ \cdot\ \mathrm{V}]+[\mathrm{f}'(\mathrm{V})\cdot\mathrm{V}^2]\}\cdot\mathrm{dV}\rangle\ +$$
$$+\langle \mathrm{M}_{02}\cdot\int_{0}^{\mathrm{v}_{12\text{хн}}}\{[\mathrm{f}(\mathrm{V})\ \cdot\ \mathrm{V}]+[\mathrm{f}'(\mathrm{V})\cdot\mathrm{V}^2]\}\cdot\mathrm{dV}\rangle\ =$$
$$=\ \langle \mathrm{M}_{01}\cdot\int_{0}^{\mathrm{v}_{11\text{хк}}}\{[\mathrm{f}(\mathrm{V})\ \cdot\ \mathrm{V}]+[\mathrm{f}'(\mathrm{V})\cdot\mathrm{V}^2]\}\cdot\mathrm{dV}\rangle\ +$$
$$+\langle \mathrm{M}_{02}\cdot\int_{0}^{\mathrm{v}_{12\text{хк}}}\{[\mathrm{f}(\mathrm{V})\ \cdot\ \mathrm{V}]+[\mathrm{f}'(\mathrm{V})\cdot\mathrm{V}^2]\}\cdot\mathrm{dV}\rangle \tag{131}$$

$$\left[\mathrm{M}_{01}\cdot\mathrm{f}\left(\mathrm{V}=\mathrm{v}_{21\text{ун}}\right)\cdot\mathrm{v}_{21\text{ун}}\right]+\left[\mathrm{M}_{02}\cdot\mathrm{f}\left(\mathrm{V}=\mathrm{v}_{22\text{ун}}\right)\cdot\mathrm{v}_{22\text{ун}}\right]=$$
$$=\left[\mathrm{M}_{01}\cdot\mathrm{f}\left(\mathrm{V}=\mathrm{v}_{21\text{ук}}\right)\cdot\mathrm{v}_{21\text{ук}}\right]+\left[\mathrm{M}_{02}\cdot\mathrm{f}\left(\mathrm{V}=\mathrm{v}_{22\text{ук}}\right)\cdot\mathrm{v}_{22\text{ук}}\right] \tag{132}$$

$$\langle \mathrm{M}_{01}\cdot\int_{0}^{\mathrm{v}_{21\text{ун}}}\{[\mathrm{f}(\mathrm{V})\ \cdot\ \mathrm{V}]+[\mathrm{f}'(\mathrm{V})\cdot\mathrm{V}^2]\}\cdot\mathrm{dV}\rangle\ +$$
$$+\langle \mathrm{M}_{02}\cdot\int_{0}^{\mathrm{v}_{22\text{ун}}}\{[\mathrm{f}(\mathrm{V})\ \cdot\ \mathrm{V}]+[\mathrm{f}'(\mathrm{V})\cdot\mathrm{V}^2]\}\cdot\mathrm{dV}\rangle\ =$$
$$=\ \langle \mathrm{M}_{01}\cdot\int_{0}^{\mathrm{v}_{21\text{ук}}}\{[\mathrm{f}(\mathrm{V})\ \cdot\ \mathrm{V}]+[\mathrm{f}'(\mathrm{V})\cdot\mathrm{V}^2]\}\cdot\mathrm{dV}\rangle\ +$$
$$+\langle \mathrm{M}_{02}\cdot\int_{0}^{\mathrm{v}_{22\text{ук}}}\{[\mathrm{f}(\mathrm{V})\ \cdot\ \mathrm{V}]+[\mathrm{f}'(\mathrm{V})\cdot\mathrm{V}^2]\}\cdot\mathrm{dV}\rangle \tag{133}$$

$$\left[\mathrm{M}_{01}\cdot\mathrm{f}\left(\mathrm{V}=\sqrt{\mathrm{v}_{11\text{ун}}^2+\mathrm{V}^2}\right)\cdot\mathrm{V}\right]+\left[\mathrm{M}_{02}\cdot\mathrm{f}\left(\mathrm{V}=\sqrt{\mathrm{v}_{12\text{ун}}^2+\mathrm{V}^2}\right)\cdot\mathrm{V}\right]=$$
$$=\left[\mathrm{M}_{01}\cdot\mathrm{f}\left(\mathrm{V}=\sqrt{\mathrm{v}_{11\text{ук}}^2+\mathrm{V}^2}\right)\cdot\mathrm{V}\right]+\left[\mathrm{M}_{02}\cdot\mathrm{f}\left(\mathrm{V}=\sqrt{\mathrm{v}_{12\text{ук}}^2+\mathrm{V}^2}\right)\cdot\mathrm{V}\right] \tag{134}$$

$$\left[M_{01}\cdot f\left(V=\sqrt{v_{11ун}^2+V^2}\right)\cdot v_{11ун}\right]+\left[M_{02}\cdot f\left(V=\sqrt{v_{12ун}^2+V^2}\right)\cdot v_{12ун}\right]=$$
$$=\left[M_{01}\cdot f\left(V=\sqrt{v_{11ук}^2+V^2}\right)\cdot v_{11ук}\right]+$$
$$+\left[M_{02}\cdot f\left(V=\sqrt{v_{12ук}^2+V^2}\right)\cdot v_{12ук}\right] \qquad (135)$$

$$\langle M_{01}\cdot\int\limits_{0}^{\sqrt{v_{11ун}^2+V^2}}\{[f(V)\cdot V]+[f'(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\rangle+$$
$$+\langle M_{02}\cdot\int\limits_{0}^{\sqrt{v_{12ун}^2+V^2}}\{[f(V)\cdot V]+[f'(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\rangle=$$
$$=\langle M_{01}\cdot\int\limits_{0}^{\sqrt{v_{11ук}^2+V^2}}\{[f(V)\cdot V]+[f'(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\rangle+$$
$$+\langle M_{02}\cdot\int\limits_{0}^{\sqrt{v_{12ук}^2+V^2}}\{[f(V)\cdot V]+[f'(V)\cdot V^2]\}\cdot dV\rangle \qquad (136)$$

В эту систему уравнений нужно также добавить уравнения связи между проекциями скоростей тел 1 и 2 в подвижной $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ и неподвижной $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ системах отсчета, записанные исходя из формул (81) и (83):

$$v_{11хн}=\frac{v_{21хн}+V}{1+\frac{V\cdot v_{21хн}}{V_{хкр}^2}} \qquad (137)$$

$$v_{12хн}=\frac{v_{22хн}+V}{1+\frac{V\cdot v_{22хн}}{V_{хкр}^2}} \qquad (138)$$

$$v_{11хк}=\frac{v_{21хк}+V}{1+\frac{V\cdot v_{21хк}}{V_{хкр}^2}} \qquad (139)$$

$$v_{12хк}=\frac{v_{22хк}+V}{1+\frac{V\cdot v_{22хк}}{V_{хкр}^2}} \qquad (140)$$

$$v_{11ун} = v_{21ун} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{хкр}^2}} \qquad (141)$$

$$v_{11ук} = v_{21ук} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{хкр}^2}} \qquad (142)$$

$$v_{12ун} = v_{22ун} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{хкр}^2}} \qquad (143)$$

$$v_{12ук} = v_{22ук} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{хкр}^2}} \qquad (144)$$

И так, имеется 17 уравнений, 12 неизвестных значений и одна неизвестная функция.

Единственной функцией **f(V)**, способной удовлетворить всем требованиям 17 уравнений, является:

$$f(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{хкр}^2}}} \qquad (145)$$

Тогда, с учетом уравнений (125)÷(127), можно записать зависимости для массы **M(V)**, импульса **P(V)** и кинетической энергии **$E_к$(V)** движущегося тела со скоростью **V**:

$$M(V) = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{хкр}^2}}} \qquad (146)$$

$$P(V) = \frac{M_0 \cdot V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{хкр}^2}}} \qquad (147)$$

$$E_к(V) = M_0 \cdot V_{хкр}^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{хкр}^2}}} - 1 \right) \qquad (148)$$

3.1.4. Зависимость массы движущегося тела от скорости при коэффициенте перехода β>1

В случае, когда значение коэффициента перехода **β** находится в диапазоне **β>1** , то исходя из формул (145)÷(148) с учетом уравнения (55) зависимости для функции **f(V)**$_>$, массы **M(V)**$_>$, импульса **P(V)**$_>$, кинетической энергии **E$_к$(V)**$_>$ движущегося тела со скоростью **V**, можно записать:

$$\mathrm{f(V)}_{>} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{хкр1}^2}}} \qquad (149)$$

$$\mathrm{M(V)}_{>} = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{хкр1}^2}}} \qquad (150)$$

$$\mathrm{P(V)}_{>} = \frac{M_0 \cdot V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{хкр1}^2}}} \qquad (151)$$

$$\mathrm{E_к(V)}_{>} = M_0 \cdot v_{хкр1}^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{хкр1}^2}}} - 1 \right) \qquad (152)$$

3.1.4.1. Проверка правильности выбора формулы (145) при β>1 (для примеров № 1 и № 2)

Сначала перепишем формулы (128)÷(136) с учетом формул (55) и (149)÷(152):

$$\frac{M_{01} \cdot v_{21хн}}{\sqrt{1 - \frac{v_{21хн}^2}{v_{хкр1}^2}}} + \frac{M_{02} \cdot v_{22хн}}{\sqrt{1 - \frac{v_{22хн}^2}{v_{хкр1}^2}}} = \frac{M_{01} \cdot v_{21хк}}{\sqrt{1 - \frac{v_{21хк}^2}{v_{хкр1}^2}}} + \frac{M_{02} \cdot v_{22хк}}{\sqrt{1 - \frac{v_{22хк}^2}{v_{хкр1}^2}}} \qquad (153)$$

$$\frac{M_{01}}{\sqrt{1-\frac{v_{21хн}^2}{v_{хкр1}^2}}}+\frac{M_{02}}{\sqrt{1-\frac{v_{22хн}^2}{v_{хкр1}^2}}}=\frac{M_{01}}{\sqrt{1-\frac{v_{21хк}^2}{v_{хкр1}^2}}}+\frac{M_{02}}{\sqrt{1-\frac{v_{22хк}^2}{v_{хкр1}^2}}} \quad (154)$$

$$\frac{M_{01}\cdot v_{11хн}}{\sqrt{1-\frac{v_{11хн}^2}{v_{хкр1}^2}}}+\frac{M_{02}\cdot v_{12хн}}{\sqrt{1-\frac{v_{12хн}^2}{v_{хкр1}^2}}}=\frac{M_{01}\cdot v_{11хк}}{\sqrt{1-\frac{v_{11хк}^2}{v_{хкр1}^2}}}+\frac{M_{02}\cdot v_{12хк}}{\sqrt{1-\frac{v_{12хк}^2}{v_{хкр1}^2}}} \quad (155)$$

$$\frac{M_{01}}{\sqrt{1-\frac{v_{11хн}^2}{v_{хкр1}^2}}}+\frac{M_{02}}{\sqrt{1-\frac{v_{12хн}^2}{v_{хкр1}^2}}}=\frac{M_{01}}{\sqrt{1-\frac{v_{11хк}^2}{v_{хкр1}^2}}}+\frac{M_{02}}{\sqrt{1-\frac{v_{12хк}^2}{v_{хкр1}^2}}} \quad (156)$$

$$\frac{M_{01}\cdot v_{21ун}}{\sqrt{1-\frac{v_{21ун}^2}{v_{хкр1}^2}}}+\frac{M_{02}\cdot v_{22ун}}{\sqrt{1-\frac{v_{22ун}^2}{v_{хкр1}^2}}}=\frac{M_{01}\cdot v_{21ук}}{\sqrt{1-\frac{v_{21ук}^2}{v_{хкр1}^2}}}+\frac{M_{02}\cdot v_{22ук}}{\sqrt{1-\frac{v_{22ук}^2}{v_{хкр1}^2}}} \quad (157)$$

$$\frac{M_{01}}{\sqrt{1-\frac{v_{21ун}^2}{v_{хкр1}^2}}}+\frac{M_{02}}{\sqrt{1-\frac{v_{22ун}^2}{v_{хкр1}^2}}}=\frac{M_{01}}{\sqrt{1-\frac{v_{21ук}^2}{v_{хкр1}^2}}}+\frac{M_{02}}{\sqrt{1-\frac{v_{22ук}^2}{v_{хкр1}^2}}} \quad (158)$$

$$\frac{M_{01}\cdot V}{\sqrt{1-\frac{v_{11ун}^2+V^2}{v_{хкр1}^2}}}+\frac{M_{02}\cdot V}{\sqrt{1-\frac{v_{12ун}^2+V^2}{v_{хкр1}^2}}}=$$

$$=\frac{M_{01}\cdot V}{\sqrt{1-\frac{v_{11ук}^2+V^2}{v_{хкр1}^2}}}+\frac{M_{02}\cdot V}{\sqrt{1-\frac{v_{12ук}^2+V^2}{v_{хкр1}^2}}} \quad (159)$$

$$\frac{M_{01}\cdot v_{11ун}}{\sqrt{1-\frac{v_{11ун}^2+V^2}{v_{хкр1}^2}}}+\frac{M_{02}\cdot v_{12ун}}{\sqrt{1-\frac{v_{12ун}^2+V^2}{v_{хкр1}^2}}}=$$

$$=\frac{M_{01}\cdot v_{11ук}}{\sqrt{1-\frac{v_{11ук}^2+V^2}{v_{хкр1}^2}}}+\frac{M_{02}\cdot v_{12ук}}{\sqrt{1-\frac{v_{12ук}^2+V^2}{v_{хкр1}^2}}} \quad (160)$$

$$\frac{M_{01}}{\sqrt{1-\frac{v_{11ун}^2+V^2}{v_{xкр1}^2}}}+\frac{M_{02}}{\sqrt{1-\frac{v_{12ун}^2+V^2}{v_{xкр1}^2}}}=$$

$$=\frac{M_{01}}{\sqrt{1-\frac{v_{11ук}^2+V^2}{v_{xкр1}^2}}}+\frac{M_{02}}{\sqrt{1-\frac{v_{12ук}^2+V^2}{v_{xкр1}^2}}} \qquad (161)$$

Где, исходя из формул (55) и (137)÷(144):

$$v_{11xн}=\frac{v_{21xн}+V}{1+\frac{V\cdot v_{21xн}}{v_{xкр1}^2}} \qquad (162)$$

$$v_{12xн}=\frac{v_{22xн}+V}{1+\frac{V\cdot v_{22xн}}{v_{xкр1}^2}} \qquad (163)$$

$$v_{11xк}=\frac{v_{21xк}+V}{1+\frac{V\cdot v_{21xк}}{v_{xкр1}^2}} \qquad (164)$$

$$v_{12xк}=\frac{v_{22xк}+V}{1+\frac{V\cdot v_{22xк}}{v_{xкр1}^2}} \qquad (165)$$

$$v_{11ун}=v_{21ун}\cdot\sqrt{1-\frac{V^2}{v_{xкр1}^2}} \qquad (166)$$

$$v_{11ук}=v_{21ук}\cdot\sqrt{1-\frac{V^2}{v_{xкр1}^2}} \qquad (167)$$

$$v_{12ун}=v_{22ун}\cdot\sqrt{1-\frac{V^2}{v_{xкр1}^2}} \qquad (168)$$

$$v_{12ук}=v_{22ук}\cdot\sqrt{1-\frac{V^2}{v_{xкр1}^2}} \qquad (169)$$

Предположим, что $\mathbf{M_{o1}} = 1$, $\mathbf{M_{o2}} = 0{,}5$, $\mathbf{V} / \mathbf{v_{xкр1}} = 0{,}5$, $\mathbf{v_{21xн}} / \mathbf{v_{xкр1}} = \mathbf{v_{21ун}} / \mathbf{v_{xкр1}} = 0{,}9$, $\mathbf{v_{22xн}} / \mathbf{v_{x\ кр1}} = \mathbf{v_{22ун}} / \mathbf{v_{xкр1}} = 0{,}6$.

Тогда числовые расчеты дают следующие результаты для примера № 1:

I. В подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

1) тело 1 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 1	До столкновения	скорость $\mathbf{v_{21xн} / v_{xкр1}}$	0,9
		масса $\mathbf{M_{21н}}$	2,294157338706
		импульс $\mathbf{P_{21н} / v_{xкр1}}$	2,064741604835
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к21н} / v_{xкр1}^2}$	1,294157338706
	После столкновения	скорость $\mathbf{v_{21xк} / v_{xкр1}}$	0,7360143377
		масса $\mathbf{M_{21к}}$	1,477179174242
		импульс $\mathbf{P_{21к} / v_{xкр1}}$	1,087225051595
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к21к} / v_{xкр1}^2}$	0,477179174242

2) тело 2 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 2	До столкновения	скорость $\mathbf{v_{22xн} / v_{xкр1}}$	0,6
		масса $\mathbf{M_{22н}}$	0,625
		импульс $\mathbf{P_{22н} / v_{xкр1}}$	0,375
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к22н} / v_{xкр1}^2}$	0,125
	После столкновения	скорость $\mathbf{v_{22xк} / v_{xкр1}}$	0,937959108239
		масса $\mathbf{M_{22к}}$	1,441978164463
		импульс $\mathbf{P_{22к} / v_{xкр1}}$	1,35251655324
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к22к} / v_{xкр1}^2}$	0,941978164463

3) система тел 1 и 2 имела:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Система тел 1 и 2	До столкновения	масса ($\mathbf{M_{21н}} + \mathbf{M_{22н}}$)	2,919157338706
		импульс ($\mathbf{P_{21н}} + \mathbf{P_{22н}}$) / $\mathbf{v_{xкр1}}$	2,439741604835
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к22н}} / \mathbf{v_{xкр1}}^2$	1,419157338706
	После столкновения	масса ($\mathbf{M_{21к}} + \mathbf{M_{22к}}$)	2,919157338706
		импульс ($\mathbf{P_{21к}} + \mathbf{P_{22к}}$) / $\mathbf{v_{xкр1}}$	2,439741604835
		кинетическая энергия ($\mathbf{E_{к21к}} + \mathbf{E_{к22к}}$) / $\mathbf{v_{xкр1}}^2$	1,419157338706

II. В неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

1) тело 1 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 1	До столкновения	скорость $\mathbf{v_{11xн}} / \mathbf{v_{xкр1}}$	0,965517241379
		масса $\mathbf{M_{11н}}$	3,841143835489
		импульс $\mathbf{P_{11н}} / \mathbf{v_{xкр1}}$	3,708690599782
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к11н}} / \mathbf{v_{xкр1}}^2$	2,841143835489
	После столкновения	скорость $\mathbf{v_{11xк}} / \mathbf{v_{xкр1}}$	0,903514517939
		масса $\mathbf{M_{11к}}$	2,333409263988
		импульс $\mathbf{P_{11к}} / \mathbf{v_{xкр1}}$	2,108269146306
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к11к}} / \mathbf{v_{xкр1}}^2$	1,333409263988

2) тело 2 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 2	До столкновения	скорость $\mathbf{v_{12хн}} / \mathbf{v_{xкр1}}$	0,846153846154
		масса $\mathbf{M_{12н}}$	0,938194187433
		импульс $\mathbf{P_{12н}} / \mathbf{v_{xкр1}}$	0,793856620136
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к12н}} / \mathbf{v_{xкр1}}^2$	0,438194187433
	После столкновения	скорость $\mathbf{v_{12хк}} / \mathbf{v_{xкр1}}$	0,978882996844
		масса $\mathbf{M_{12к}}$	2,445928758933
		импульс $\mathbf{P_{12к}} / \mathbf{v_{xкр1}}$	2,394278073612
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к12к}} / \mathbf{v_{xкр1}}^2$	1,945928758933

3) система тел 1 и 2 имела:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Система тел 1 и 2	До столкновения	масса $(\mathbf{M_{11н}} + \mathbf{M_{12н}})$	4,779338022922
		импульс $(\mathbf{P_{11н}} + \mathbf{P_{12н}}) / \mathbf{v_{xкр1}}$	4,502547219918
		кинетическая энергия $(\mathbf{E_{к11н}} + \mathbf{E_{к12н}}) / \mathbf{v_{xкр1}}^2$	3,279338022922
	После столкновения	масса $(\mathbf{M_{11к}} + \mathbf{M_{12к}})$	4,779338022922
		импульс $(\mathbf{P_{11к}} + \mathbf{P_{12к}}) / \mathbf{v_{xкр1}}$	4,502547219918
		кинетическая энергия $(\mathbf{E_{к11к}} + \mathbf{E_{к12к}}) / \mathbf{v_{xкр1}}^2$	3,279338022922

Для примера № 2 числовые расчеты дают следующие результаты:

I. В подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

1) тело 1 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 1	До столкновения	скорость $\mathbf{v_{21ун}} / \mathbf{v_{хкр1}}$	0,9
		масса $\mathbf{M_{21н}}$	2,294157338706
		импульс $\mathbf{P_{21н}} / \mathbf{v_{хкр1}}$	2,064741604835
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к21н}} / \mathbf{v_{хкр1}}^2$	1,294157338706
	После столкновения	скорость $\mathbf{v_{21ук}} / \mathbf{v_{хкр1}}$	0,7360143377
		масса $\mathbf{M_{21к}}$	1,477179174242
		импульс $\mathbf{P_{21к}} / \mathbf{v_{хкр1}}$	1,087225051595
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к21к}} / \mathbf{v_{хкр1}}^2$	0,477179174242

2) тело 2 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 2	До столкновения	скорость $\mathbf{v_{22ун}} / \mathbf{v_{хкр1}}$	0,6
		масса $\mathbf{M_{22н}}$	0,625
		импульс $\mathbf{P_{22н}} / \mathbf{v_{хкр1}}$	0,375
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к22н}} / \mathbf{v_{хкр1}}^2$	0,125
	После столкновения	скорость $\mathbf{v_{22ук}} / \mathbf{v_{хкр1}}$	0,937959108239
		масса $\mathbf{M_{22к}}$	1,441978164463
		импульс $\mathbf{P_{22к}} / \mathbf{v_{хкр1}}$	1,35251655324
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к22к}} / \mathbf{v_{хкр1}}^2$	0,941978164463

3) система тел 1 и 2 имела:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Система тел 1 и 2	До столкновения	масса ($\mathbf{M_{21н}} + \mathbf{M_{22н}}$)	2,919157338706
		импульс ($\mathbf{P_{21н}} + \mathbf{P_{22н}}$) / $\mathbf{v_{xкр1}}$	2,439741604835
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к22н}} / \mathbf{v_{xкр1}}^2$	1,419157338706
	После столкновения	масса ($\mathbf{M_{21к}} + \mathbf{M_{22к}}$)	2,919157338706
		импульс ($\mathbf{P_{21к}} + \mathbf{P_{22к}}$) / $\mathbf{v_{xкр1}}$	2,439741604835
		кинетическая энергия ($\mathbf{E_{к21к}} + \mathbf{E_{к22к}}$) / $\mathbf{v_{xкр1}}^2$	1,419157338706

II. В неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

1) тело 1 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 1	До столкновения	проекция скорости $\mathbf{v_{11xн}} / \mathbf{v_{xкр1}}$	0,5
		проекция скорости $\mathbf{v_{11yн}} / \mathbf{v_{xкр1}}$	0,779422863406
		масса $\mathbf{M_{11н}}$	2,64906471413
		проекция импульса $\mathbf{P_{11xн}} / \mathbf{v_{xкр1}}$	1,324532357065
		проекция импульса $\mathbf{P_{11yн}} / \mathbf{v_{xкр1}}$	2,064741604835
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к11н}} / \mathbf{v_{xкр1}}^2$	1,64906471413
	После столкновения	проекция скорости $\mathbf{v_{11xк}} / \mathbf{v_{xкр1}}$	0,5
		проекция скорости $\mathbf{v_{11yк}} / \mathbf{v_{xкр1}}$	0,637407113998
		масса $\mathbf{M_{11к}}$	1,70569958778
		проекция импульса $\mathbf{P_{11xк}} / \mathbf{v_{xкр1}}$	0,85284979389
		проекция импульса $\mathbf{P_{11yк}} / \mathbf{v_{xкр1}}$	1,087225051595
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к11к}} / \mathbf{v_{xкр1}}^2$	0,70569958778

2) тело 2 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 2	До столкновения	проекция скорости $\mathbf{v}_{12xн} / \mathbf{v}_{xкр1}$	0,5
		проекция скорости $\mathbf{v}_{12yн} / \mathbf{v}_{xкр1}$	0,519615242271
		масса $\mathbf{M}_{12н}$	0,721687836487
		проекция импульса $\mathbf{P}_{12xн} / \mathbf{v}_{xкр1}$	0,360843918244
		проекция импульса $\mathbf{P}_{12yн} / \mathbf{v}_{xкр1}$	0,375
		кинетическая энергия $\mathbf{E}_{к12н} / \mathbf{v}_{xкр1}^2$	0,221687836487
	После столкновения	проекция скорости $\mathbf{v}_{12xк} / \mathbf{v}_{xкр1}$	0,5
		проекция скорости $\mathbf{v}_{12yк} / \mathbf{v}_{xкр1}$	0,812296415446
		масса $\mathbf{M}_{12к}$	1,665052962837
		проекция импульса $\mathbf{P}_{12xк} / \mathbf{v}_{xкр1}$	0,832526481418
		проекция импульса $\mathbf{P}_{12yк} / \mathbf{v}_{xкр1}$	1,35251655324
		кинетическая энергия $\mathbf{E}_{к12к} / \mathbf{v}_{xкр1}^2$	1,165052962837

3) система тел 1 и 2 имела:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Система тел 1 и 2	До столкновения	масса $(\mathbf{M}_{11н} + \mathbf{M}_{12н})$	3,370752550617
		проекция импульса $(\mathbf{P}_{11xн} + \mathbf{P}_{12xн}) / \mathbf{v}_{xкр1}$	1,685376275309
		проекция импульса $(\mathbf{P}_{11yн} + \mathbf{P}_{12yн}) / \mathbf{v}_{xкр1}$	2,439741604835
		кинетическая энергия $(\mathbf{E}_{к11н} + \mathbf{E}_{к12н}) / \mathbf{v}_{xкр1}^2$	1,870752550617
	После столкновения	масса $(\mathbf{M}_{11к} + \mathbf{M}_{12к})$	3,370752550617
		проекция импульса $(\mathbf{P}_{11xк} + \mathbf{P}_{12xк}) / \mathbf{v}_{xкр1}$	1,685376275309
		проекция импульса $(\mathbf{P}_{11yк} + \mathbf{P}_{12yк}) / \mathbf{v}_{xкр1}$	2,439741604835
		кинетическая энергия $(\mathbf{E}_{к11к} + \mathbf{E}_{к12к}) / \mathbf{v}_{xкр1}^2$	1,870752550617

По результатам расчета можно сделать следующий вывод: в примерах

№ 1 и № 2 в подвижной $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ и неподвижной $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ системах отсчета до и после столкновения масса, импульс и кинетическая энергия механической системы тел 1 и 2 остаются неизменными.

Следовательно, формулы (145)÷(148) в случае, когда коэффициент перехода $\boldsymbol{\beta} > \mathbf{1}$, удовлетворяют требованиям системы уравнений (128)÷(136).

3.1.5. Зависимость массы движущегося тела от скорости при коэффициенте перехода 0 < β < 1

В случае, когда значение коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ находится в диапазоне $\mathbf{0} < \boldsymbol{\beta} < \mathbf{1}$, то, исходя из формул (145)÷(148) с учетом уравнения (56) зависимости для функции $\mathbf{f(V)}_<$, массы $\mathbf{M(V)}_<$, импульса $\mathbf{P(V)}_<$, кинетической энергии $\mathbf{E_к(V)}_<$ движущегося тела со скоростью $\mathbf{V}$, можно записать:

$$f(V)_< = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{хкр2}^2}}} \tag{170}$$

$$M(V)_< = \frac{M_0}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{хкр2}^2}}} \tag{171}$$

$$P(V)_< = \frac{M_0 \cdot V}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{хкр2}^2}}} \tag{172}$$

$$E_к(V)_< = M_0 \cdot v_{хкр2}^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{хкр2}^2}}}\right) \tag{173}$$

3.1.5.1. Проверка правильности выбора формулы (145) при 0 < β < 1

(для примеров № 1 и № 2)

Сначала перепишем формулы (128)÷(136) с учетом формул (56) и (170)÷(173):

$$\frac{M_{01}\cdot v_{21хн}}{\sqrt{1+\frac{v_{21хн}^2}{v_{хкр2}^2}}}+\frac{M_{02}\cdot v_{22хн}}{\sqrt{1+\frac{v_{22хн}^2}{v_{хкр2}^2}}}=\frac{M_{01}\cdot v_{21хк}}{\sqrt{1+\frac{v_{21хк}^2}{v_{хкр2}^2}}}+\frac{M_{02}\cdot v_{22хк}}{\sqrt{1+\frac{v_{22хк}^2}{v_{хкр2}^2}}} \quad (174)$$

$$\frac{M_{01}}{\sqrt{1+\frac{v_{21хн}^2}{v_{хкр2}^2}}}+\frac{M_{02}}{\sqrt{1+\frac{v_{22хн}^2}{v_{хкр2}^2}}}=\frac{M_{01}}{\sqrt{1+\frac{v_{21хк}^2}{v_{хкр2}^2}}}+\frac{M_{02}}{\sqrt{1+\frac{v_{22хк}^2}{v_{хкр2}^2}}} \quad (175)$$

$$\frac{M_{01}\cdot v_{11хн}}{\sqrt{1+\frac{v_{11хн}^2}{v_{хкр2}^2}}}+\frac{M_{02}\cdot v_{12хн}}{\sqrt{1+\frac{v_{12хн}^2}{v_{хкр2}^2}}}=\frac{M_{01}\cdot v_{11хк}}{\sqrt{1+\frac{v_{11хк}^2}{v_{хкр2}^2}}}+\frac{M_{02}\cdot v_{12хк}}{\sqrt{1+\frac{v_{12хк}^2}{v_{хкр2}^2}}} \quad (176)$$

$$\frac{M_{01}}{\sqrt{1+\frac{v_{11хн}^2}{v_{хкр2}^2}}}+\frac{M_{02}}{\sqrt{1+\frac{v_{12хн}^2}{v_{хкр2}^2}}}=\frac{M_{01}}{\sqrt{1+\frac{v_{11хк}^2}{v_{хкр2}^2}}}+\frac{M_{02}}{\sqrt{1+\frac{v_{12хк}^2}{v_{хкр2}^2}}} \quad (177)$$

$$\frac{M_{01}\cdot v_{21ун}}{\sqrt{1+\frac{v_{21ун}^2}{v_{хкр2}^2}}}+\frac{M_{02}\cdot v_{22ун}}{\sqrt{1+\frac{v_{22ун}^2}{v_{хкр2}^2}}}=\frac{M_{01}\cdot v_{21ук}}{\sqrt{1+\frac{v_{21ук}^2}{v_{хкр2}^2}}}+\frac{M_{02}\cdot v_{22ук}}{\sqrt{1+\frac{v_{22ук}^2}{v_{хкр2}^2}}} \quad (178)$$

$$\frac{M_{01}}{\sqrt{1+\frac{v_{21ун}^2}{v_{хкр2}^2}}}+\frac{M_{02}}{\sqrt{1+\frac{v_{22ун}^2}{v_{хкр2}^2}}}=\frac{M_{01}}{\sqrt{1+\frac{v_{21ук}^2}{v_{хкр2}^2}}}+\frac{M_{02}}{\sqrt{1+\frac{v_{22ук}^2}{v_{хкр2}^2}}} \quad (179)$$

$$\frac{M_{01}\cdot V}{\sqrt{1+\frac{v_{11ун}^2+V^2}{v_{хкр2}^2}}}+\frac{M_{02}\cdot V}{\sqrt{1+\frac{v_{12ун}^2+V^2}{v_{хкр2}^2}}}=$$

$$=\frac{M_{01}\cdot V}{\sqrt{1+\frac{v_{11ук}^2+V^2}{v_{хкр2}^2}}}+\frac{M_{02}\cdot V}{\sqrt{1+\frac{v_{12ук}^2+V^2}{v_{хкр2}^2}}} \quad (180)$$

$$\frac{M_{01}\cdot v_{11ун}}{\sqrt{1+\frac{v_{11ун}^2+V^2}{v_{хкр2}^2}}}+\frac{M_{02}\cdot v_{12ун}}{\sqrt{1+\frac{v_{12ун}^2+V^2}{v_{хкр2}^2}}}=$$

$$=\frac{M_{01}\cdot v_{11ук}}{\sqrt{1+\frac{v_{11ук}^2+V^2}{v_{хкр2}^2}}}+\frac{M_{02}\cdot v_{12ук}}{\sqrt{1+\frac{v_{12ук}^2+V^2}{v_{хкр2}^2}}} \qquad (181)$$

$$\frac{M_{01}}{\sqrt{1+\frac{v_{11ун}^2+V^2}{v_{хкр1}^2}}}+\frac{M_{02}}{\sqrt{1+\frac{v_{12ун}^2+V^2}{v_{хкр1}^2}}}=$$

$$=\frac{M_{01}}{\sqrt{1+\frac{v_{11ук}^2+V^2}{v_{хкр1}^2}}}+\frac{M_{02}}{\sqrt{1+\frac{v_{12ук}^2+V^2}{v_{хкр1}^2}}} \qquad (182)$$

Где, исходя из формул (56) и (137)÷(144):

$$v_{11хн}=\frac{v_{21хн}+V}{1-\frac{V\cdot v_{21хн}}{v_{хкр2}^2}} \qquad (183)$$

$$v_{12хн}=\frac{v_{22хн}+V}{1-\frac{V\cdot v_{22хн}}{v_{хкр2}^2}} \qquad (184)$$

$$v_{11хк}=\frac{v_{21хк}+V}{1-\frac{V\cdot v_{21хк}}{v_{хкр2}^2}} \qquad (185)$$

$$v_{12хк}=\frac{v_{22хк}+V}{1-\frac{V\cdot v_{22хк}}{v_{хкр2}^2}} \qquad (186)$$

$$v_{11ун}=v_{21ун}\cdot\sqrt{1+\frac{V^2}{v_{хкр1}^2}} \qquad (187)$$

$$v_{11ук} = v_{21ук} \cdot \sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{хкр2}^2}} \qquad (188)$$

$$v_{12ун} = v_{22ун} \cdot \sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{хкр2}^2}} \qquad (189)$$

$$v_{12ук} = v_{22ук} \cdot \sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{хкр2}^2}} \qquad (190)$$

Предположим, что $\mathbf{M_{o1}} = 1$, $\mathbf{M_{o2}} = 0{,}5$, $\mathbf{V} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0{,}5$, $\mathbf{v_{21хн}} / \mathbf{v_{хкр2}} = \mathbf{v_{21ун}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0{,}9$, $\mathbf{v_{22хн}} / \mathbf{v_{хкр2}} = \mathbf{v_{22ун}} / \mathbf{v_{хкр2}} = 0{,}6$.

Тогда числовые расчеты дают следующие результаты для примера № 1:

I. В подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

1) тело 1 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 1	До столкновения	скорость $\mathbf{v_{21хн}} / \mathbf{v_{хкр2}}$	0,9
		масса $\mathbf{M_{21н}}$	0,743294146247
		импульс $\mathbf{P_{21н}} / \mathbf{v_{хкр2}}$	0,668964731622
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к21н}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2$	0,256705853753
	После столкновения	скорость $\mathbf{v_{21хк}} / \mathbf{v_{хкр2}}$	0,691099932748
		масса $\mathbf{M_{21к}}$	0,822656908881
		импульс $\mathbf{P_{21к}} / \mathbf{v_{хкр2}}$	0,568538134403
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к21к}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2$	0,177343091119

2) тело 2 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 2	До столкновения	скорость $\mathbf{v}_{22хн} / \mathbf{v}_{хкр2}$	0,6
		масса $\mathbf{M}_{22н}$	0,428746462856
		импульс $\mathbf{P}_{22н} / \mathbf{v}_{хкр2}$	0,257247877714
		кинетическая энергия $\mathbf{E}_{к22н} / \mathbf{v}_{хкр2}^2$	0,071253537144
	После столкновения	скорость $\mathbf{v}_{22хк} / \mathbf{v}_{хкр2}$	1,023729712365
		масса $\mathbf{M}_{22к}$	0,349383700222
		импульс $\mathbf{P}_{22к} / \mathbf{v}_{хкр2}$	0,357674474934
		кинетическая энергия $\mathbf{E}_{к22к} / \mathbf{v}_{хкр2}^2$	0,150616299778

3)система тел 1 и 2 имела:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Система тел 1 и 2	До столкновения	масса $(\mathbf{M}_{21н} + \mathbf{M}_{22н})$	1,172040609103
		импульс $(\mathbf{P}_{21н} + \mathbf{P}_{22н}) / \mathbf{v}_{хкр2}$	0,926212609336
		кинетическая энергия $\mathbf{E}_{к22н} / \mathbf{v}_{хкр2}^2$	0,327959390897
	После столкновения	масса $(\mathbf{M}_{21к} + \mathbf{M}_{22к})$	1,172040609103
		импульс $(\mathbf{P}_{21к} + \mathbf{P}_{22к}) / \mathbf{v}_{хкр2}$	0,926212609336
		кинетическая энергия $(\mathbf{E}_{к21к} + \mathbf{E}_{к22к}) / \mathbf{v}_{хкр2}^2$	0,327959390897

II. В неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

1) тело 1 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 1	До столкновения	скорость $\mathbf{v_{11хн}} / \mathbf{v_{хкр2}}$	2,545454545455
		масса $\mathbf{M_{11н}}$	0,365652372423
		импульс $\mathbf{P_{11н}} / \mathbf{v_{хкр2}}$	0,93075149344
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к11н}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2$	0,634347627577
	После столкновения	скорость $\mathbf{v_{11хк}} / \mathbf{v_{хкр2}}$	1,820001331727
		масса $\mathbf{M_{11к}}$	0,481548724902
		импульс $\mathbf{P_{11к}} / \mathbf{v_{хкр2}}$	0,876419320614
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к11к}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2$	0,518451275098

2) тело 2 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 2	До столкновения	скорость $\mathbf{v_{12хн}} / \mathbf{v_{хкр2}}$	1,571428571429
		масса $\mathbf{M_{12н}}$	0,268437746097
		импульс $\mathbf{P_{12н}} / \mathbf{v_{хкр2}}$	0,421830743866
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к12н}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2$	0,231562253903
	После столкновения	скорость $\mathbf{v_{12хк}} / \mathbf{v_{хкр2}}$	3,121532492927
		масса $\mathbf{M_{12к}}$	0,152541393617
		импульс $\mathbf{P_{12к}} / \mathbf{v_{хкр2}}$	0,476162916693
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к12к}} / \mathbf{v_{хкр2}}^2$	0,347458606383

3) система тел 1 и 2 имела:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Система тел 1 и 2	До столкновения	масса $(\mathbf{M}_{11н} + \mathbf{M}_{12н})$	0,63409011852
		импульс $(\mathbf{P}_{11н} + \mathbf{P}_{12н}) / \mathbf{v}_{хкр2}$	1,352582237306
		кинетическая энергия $(\mathbf{E}_{к11н} + \mathbf{E}_{к12н}) / \mathbf{v}_{хкр2}^2$	0,86590988148
	После столкновения	масса $(\mathbf{M}_{11к} + \mathbf{M}_{12к})$	0,63409011852
		импульс $(\mathbf{P}_{11к} + \mathbf{P}_{12к}) / \mathbf{v}_{хкр2}$	1,352582237306
		кинетическая энергия $(\mathbf{E}_{к11к} + \mathbf{E}_{к12к}) / \mathbf{v}_{хкр2}^2$	0,86590988148

Для примера № 2 числовые расчеты дают следующие результаты:

I. В подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

1) тело 1 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 1	До столкновения	скорость $\mathbf{v}_{21ун} / \mathbf{v}_{хкр2}$	0,9
		масса $\mathbf{M}_{21н}$	0,743294146247
		импульс $\mathbf{P}_{21н} / \mathbf{v}_{хкр2}$	0,668964731622
		кинетическая энергия $\mathbf{E}_{к21н} / \mathbf{v}_{хкр2}^2$	0,256705853753
	После столкновения	скорость $\mathbf{v}_{21ук} / \mathbf{v}_{хкр2}$	0,691099932748
		масса $\mathbf{M}_{21к}$	0,822656908881
		импульс $\mathbf{P}_{21к} / \mathbf{v}_{хкр2}$	0,568538134403
		кинетическая энергия $\mathbf{E}_{к21к} / \mathbf{v}_{хкр2}^2$	0,177343091119

2) тело 2 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 2	До столкновения	скорость $\mathbf{v_{22ун}} / \mathbf{v_{xкр2}}$	0,6
		масса $\mathbf{M_{22н}}$	0,428746462856
		импульс $\mathbf{P_{22н}} / \mathbf{v_{xкр2}}$	0,257247877714
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к22н}} / \mathbf{v_{xкр2}}^2$	0,071253537144
	После столкновения	скорость $\mathbf{v_{22ук}} / \mathbf{v_{xкр2}}$	1,023729712365
		масса $\mathbf{M_{22к}}$	0,349383700222
		импульс $\mathbf{P_{22к}} / \mathbf{v_{xкр2}}$	0,357674474934
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к22к}} / \mathbf{v_{xкр2}}^2$	0,150616299778

3) система тел 1 и 2 имела:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Система тел 1 и 2	До столкновения	масса $(\mathbf{M_{21н}} + \mathbf{M_{22н}})$	1,172040609103
		импульс $(\mathbf{P_{21н}} + \mathbf{P_{22н}}) / \mathbf{v_{xкр2}}$	0,926212609336
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к22н}} / \mathbf{v_{xкр2}}^2$	0,327959390897
	После столкновения	масса $(\mathbf{M_{21к}} + \mathbf{M_{22к}})$	1,172040609103
		импульс $(\mathbf{P_{21к}} + \mathbf{P_{22к}}) / \mathbf{v_{xкр2}}$	0,926212609336
		кинетическая энергия $(\mathbf{E_{к21к}} + \mathbf{E_{к22к}}) / \mathbf{v_{xкр2}}^2$	0,327959390897

II. В неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

1) тело 1 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 1	До столкновения	проекция скорости $\mathbf{v_{11xн}} / \mathbf{v_{xкр2}}$	0,5
		проекция скорости $\mathbf{v_{11yн}} / \mathbf{v_{xкр2}}$	1,006230589875
		масса $\mathbf{M_{11н}}$	0,664822495315
		проекция импульса $\mathbf{P_{11xн}} / \mathbf{v_{xкр2}}$	0,332411247657
		проекция импульса $\mathbf{P_{11yн}} / \mathbf{v_{xкр2}}$	0,668964731622
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к11н}} / \mathbf{v_{xкр2}}^2$	0,335177504685
	После столкновения	проекция скорости $\mathbf{v_{11xк}} / \mathbf{v_{xкр2}}$	0,5
		проекция скорости $\mathbf{v_{11yк}} / \mathbf{v_{xкр2}}$	0,772673214435
		масса $\mathbf{M_{11к}}$	0,735806708167
		проекция импульса $\mathbf{P_{11xк}} / \mathbf{v_{xкр2}}$	0,367903354084
		проекция импульса $\mathbf{P_{11yк}} / \mathbf{v_{xкр2}}$	0,568538134403
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к11к}} / \mathbf{v_{xкр2}}^2$	0,264193291833

2) тело 2 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 2	До столкновения	проекция скорости $\mathbf{v}_{12xн} / \mathbf{v}_{xкр2}$	0,5
		проекция скорости $\mathbf{v}_{12yн} / \mathbf{v}_{xкр2}$	0,67082039325
		масса $\mathbf{M}_{12н}$	0,383482494424
		проекция импульса $\mathbf{P}_{12xн} / \mathbf{v}_{xкр2}$	0,191741247212
		проекция импульса $\mathbf{P}_{12yн} / \mathbf{v}_{xкр2}$	0,257247877714
		кинетическая энергия $\mathbf{E}_{к12н} / \mathbf{v}_{xкр2}^2$	0,116517505576
	После столкновения	проекция скорости $\mathbf{v}_{12xк} / \mathbf{v}_{xкр2}$	0,5
		проекция скорости $\mathbf{v}_{12yк} / \mathbf{v}_{xкр2}$	1,144564613718
		масса $\mathbf{M}_{12к}$	0,312498281571
		проекция импульса $\mathbf{P}_{12xк} / \mathbf{v}_{xкр2}$	0,156249140785
		проекция импульса $\mathbf{P}_{12yк} / \mathbf{v}_{xкр2}$	0,357674474934
		кинетическая энергия $\mathbf{E}_{к12к} / \mathbf{v}_{xкр2}^2$	0,187501718429

3) система тел 1 и 2 имела:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Система тел 1 и 2	До столкновения	масса $(\mathbf{M}_{11н} + \mathbf{M}_{12н})$	1,048304989738
		проекция импульса $(\mathbf{P}_{11xн} + \mathbf{P}_{12xн}) / \mathbf{v}_{xкр2}$	0,524152494869
		проекция импульса $(\mathbf{P}_{11yн} + \mathbf{P}_{12yн}) / \mathbf{v}_{xкр2}$	0,926212609336
		кинетическая энергия $(\mathbf{E}_{к11н} + \mathbf{E}_{к12н}) / \mathbf{v}_{xкр2}^2$	0,451695010262
	После столкновения	масса $(\mathbf{M}_{11к} + \mathbf{M}_{12к})$	1,048304989738
		проекция импульса $(\mathbf{P}_{11xк} + \mathbf{P}_{12xк}) / \mathbf{v}_{xкр2}$	0,524152494869
		проекция импульса $(\mathbf{P}_{11yк} + \mathbf{P}_{12yк}) / \mathbf{v}_{xкр2}$	0,926212609336
		кинетическая энергия $(\mathbf{E}_{к11к} + \mathbf{E}_{к12к}) / \mathbf{v}_{xкр2}^2$	0,451695010262

По результатам расчета можно сделать следующий вывод: в примерах № 1 и № 2 в системах отсчета подвижной $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ и неподвижной $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ до и после столкновения масса, импульс и кинетическая энергия механической системы тел 1 и 2 остаются неизменными.

Следовательно, формулы (170)÷(173) в случае, когда коэффициент перехода $\mathbf{0 < \beta < 1}$, удовлетворяют требованиям системы уравнений (128)÷(136).

3.1.6. Сравнение формул (150)÷(152) с формулами (171)÷(173).

О зависимостях (150)÷(152):

$$M(V)_{>} \;=\; \frac{M_0}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{v_{хкр1}^2}}} \qquad (150)$$

$$P(V)_{>} \;=\; \frac{M_0 \cdot V}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{v_{хкр1}^2}}} \qquad (151)$$

$$E_к(V)_{>} \;=\; M_0 \cdot v_{хкр1}^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{v_{хкр1}^2}}} \;-\; 1 \right) \qquad (152)$$

для массы $\mathbf{M(V)_{>}}$, импульса $\mathbf{P(V)_{>}}$ и кинетической энергии $\mathbf{E_к(V)_{>}}$ движущегося тела со скоростью $\mathbf{V}$ в случае, когда коэффициент перехода $\mathbf{\beta > 1}$, можно сказать следующее:

Скорость **V**	Масса **M(V)**$_>$	Импульс **P(V)**$_>$	Кинетическая энергия **E$_к$(V)**$_>$
$V \ll v_{хкр1}$	M_0	$M_0 \cdot V$	$\frac{M_0 \cdot V^2}{2}$
$V < v_{хкр1}$	имеет действительное значение	имеет действительное значение	имеет действительное значение
$V = v_{хкр1}$	∞	∞	∞
$V > v_{хкр1}$	не имеет действительного значения	не имеет действительного значения	не имеет действительного значения

Аналогично о зависимостях (171)÷(173):

$$M(V)_< = \frac{M_0}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{хкр2}^2}}} \qquad (171)$$

$$P(V)_< = \frac{M_0 \cdot V}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{хкр2}^2}}} \qquad (172)$$

$$E_к(V)_< = M_0 \cdot v_{хкр2}^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{хкр2}^2}}}\right) \qquad (173)$$

для массы **M(V)**$_<$, импульса **P(V)**$_<$ и кинетической энергии **E$_к$(V)**$_<$ движущегося тела со скоростью **V** в случае, когда коэффициент перехода **0 < β < 1 ,** можно сказать следующее:

Скорость **V**	Масса $\mathbf{M(V)}_{<}$	Импульс $\mathbf{P(V)}_{<}$	Кинетическая энергия $\mathbf{E_к(V)}_{<}$
$V \ll v_{хкр2}$	M_0	$M_0 \cdot V$	$\frac{M_0 \cdot V^2}{2}$
$V < v_{хкр2}$	имеет действительное значение	имеет действительное значение	имеет действительное значение
$V = v_{хкр2}$	$\frac{M_0}{\sqrt{2}}$	$\frac{M_0 \cdot v_{хкр2}}{\sqrt{2}}$	$M_0 \cdot v_{хкр2}^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$V > v_{хкр2}$	имеет действительное значение	имеет действительное значение	имеет действительное значение
$V = \infty$	стремится к нулю	$M_0 \cdot v_{хкр2}$	$M_0 \cdot v_{хкр2}^2$

Как видно из сравнения, оба диапазона возможного значения коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta} > \mathbf{1}$ и $\mathbf{0} < \boldsymbol{\beta} < \mathbf{1}$ являются равноценными (оба удовлетворяют граничному условию).

Также опираясь на формулы (97) и (98) можно отметить, что в случае $\boldsymbol{\beta} > \mathbf{1}$ значения скоростей $\mathbf{v_{x1}}$ и $\mathbf{v_{x2}}$ движения точки соответственно в неподвижной $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижной $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ инерциальных системах отсчета могут находиться только в диапазоне от $-\,\mathbf{v_{хкр1}}$ до $+\,\mathbf{v_{хкр1}}$.

В свою очередь в случае $\mathbf{0} < \boldsymbol{\beta} < \mathbf{1}$ рассматривая формулу (113) можно увидеть, что при значениях $\mathbf{v_{x2}} > 0$ и $\mathbf{V} > 0$ изменение величины скорости $\mathbf{v_{x2}}$ движения точки в подвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ от $\mathbf{0}$ до $\mathbf{v_{хкр2}^2/V}$ приведет к изменению величины скорости $\mathbf{v_{x1}}$ движения этой точки в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ от $\mathbf{V}$ до $+\infty$, а при изменении величины скорости $\mathbf{v_{x2}}$ движения точки в подвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ от $\mathbf{v_{хкр2}^2/V}$ до ∞ величина скорости $\mathbf{v_{x1}}$ движения этой точки в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ изменяется от $-\infty$ до $\mathbf{0}$ (т.е. в области значений $\mathbf{v_{x2}}$, равного $\mathbf{v_{хкр2}^2/V}$, происходит переход величины значения $\mathbf{v_{x1}}$ от $+\infty$ до $-\infty$).

3.2. Определение значения коэффициента перехода β

С помощью полученных зависимостей (150) и (171) массы тела от скорости **V** постараемся установить, в каком именно диапазоне в действительности находятся значения коэффициента перехода **β** - в $\boldsymbol{\beta > 1}$ или в $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$, т.к. эти диапазоны являются взаимоисключающими в связи с однозначностью зависимости коэффициента перехода **β** от величины скорости **V**.

Попробуем решить эту задачу, рассматривая закон сохранения импульса (закон сохранения механической энергии) в случае, если все или часть тел (материальных точек), составляющих замкнутую механическую систему, движутся нелинейно.

С этой целью обратимся к простейшему примеру.

3.2.1. Пример № 3

Допустим, что имеются две инерциальные системы отсчета, аналогичные системам отсчета, изображенным на рис. 1 - неподвижная $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижная $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, которая движется со скоростью **V** параллельно оси $\mathbf{O_1x_1}$ относительно системы $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$.

Предположим, что имеется замкнутая механическая система тел, показанная на рис. 5 и состоящая из точечных тел 1 и 2, имеющих равные массы $\mathbf{M_o}$ в состоянии покоя, и нити 3.

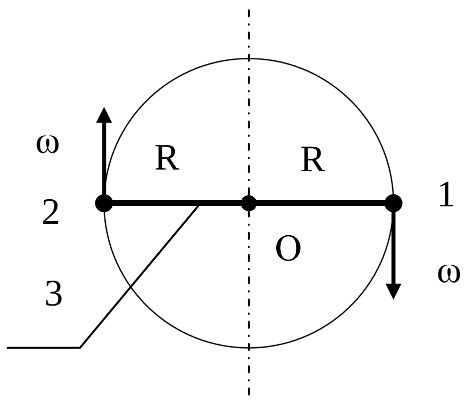

Рис. 5

Тела 1 и 2 соединены абсолютно жесткой (недеформируемой) нитью 3, не имеющей массы.

Тела 1 и 2 вращаются с угловой скоростью **ω** вокруг общего центра масс - точки **O**. Расстояние от точечного тела 1 (тела 2) до точки **O** равно **R**.

Поместим рассматриваемую замкнутую механическую систему тел 1 и 2 с нитью 3 в подвижную систему отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ таким образом, чтобы точка **O** была бы неподвижна в этой системе отсчета и совпадала с началом координат $\mathbf{O_2}$, а вращение тел 1 и 2 вокруг нее происходило бы по часовой стрелке в плоскости $\mathbf{O_2x_2y_2}$, как показано на рис. 6.

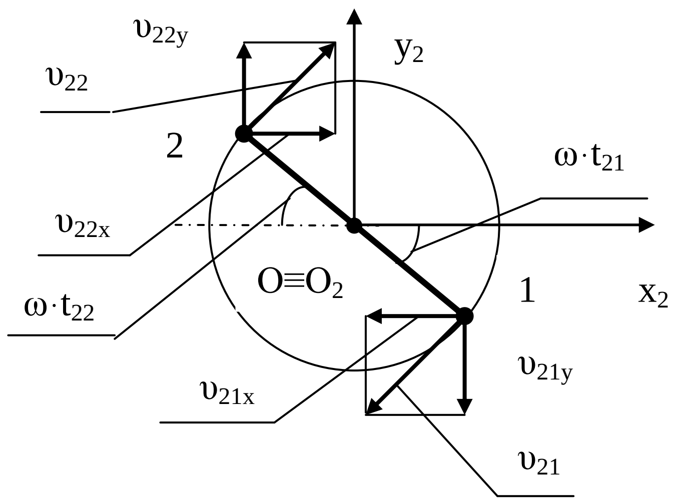

Рис. 6

Также допустим, что в момент начала отсчета времени ($\boldsymbol{t_2}$=0) в системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ тела 1 и 2 находились на оси $\mathbf{O_2x_2}$, причем, тело 1 имело положительную координату, а тело 2 – отрицательную.

Опираясь на вышесказанное, можно отметить, что в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ в любой момент времени $\boldsymbol{t_2}$ тела 1 и 2 будут иметь скорости $\boldsymbol{\upsilon_{21}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22}}$,соответственно равные:

$$v_{21} = v_{22} = v = \omega \cdot \mathrm{R} \qquad (191)$$

При этом проекции $\boldsymbol{\upsilon_{21x}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{21y}}$ скорости тела 1 и проекции $\boldsymbol{\upsilon_{22x}}$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22y}}$ скорости тела 2 на оси $\mathbf{O_2x_2}$ и $\mathbf{O_2y_2}$, соответственно для моментов времени $\boldsymbol{t_{21}}$ и $\boldsymbol{t_{22}}$, будут равны:

$$v_{21x} = -[v \cdot \sin(\omega \cdot t_{21})] \qquad (192)$$

$$v_{21y} = -[v \cdot \cos(\omega \cdot t_{21})] \qquad (193)$$

$$v_{22x} = v \cdot \sin(\omega \cdot t_{22}) \qquad (194)$$

$$v_{22y} = v \cdot \cos(\omega \cdot t_{22}) \qquad (195)$$

Связь между координатами $\mathbf{x_{21}}$ и $\mathbf{y_{21}}$ тела 1 в зависимости от времени $\boldsymbol{t_{21}}$ и связь между координатами $\mathbf{x_{22}}$ и $\mathbf{y_{22}}$ тела 2 в зависимости от времени $\boldsymbol{t_{22}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ можно записать в виде:

$$x_{21} = R \cdot \cos(\omega \cdot t_{21}) \qquad (196)$$

$$y_{21} = -[R \cdot \sin(\omega \cdot t_{21})] \qquad (197)$$

$$x_{22} = -[R \cdot \cos(\omega \cdot t_{22})] \qquad (198)$$

$$y_{22} = R \cdot \sin(\omega \cdot t_{22}) \qquad (199)$$

Опираясь на уравнения (34) и (36), можно написать связь между координатами $\mathbf{x_{11}}$ и $\mathbf{y_{11}}$ тела 1 в момент времени $\mathbf{t_{11}}$ в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и координатами $\mathbf{x_{21}}$ и $\mathbf{y_{21}}$ тела 1 в момент времени $\boldsymbol{t_{21}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

$$x_{11} = \beta \cdot [x_{21} + (V \cdot t_{21})] \qquad (200)$$

$$y_{11} = y_{21} \qquad (201)$$

Аналогично, используя уравнения (34) и (36), можно записать связь между координатами $\mathbf{x_{12}}$ и $\mathbf{y_{12}}$ тела 2 в момент времени $\boldsymbol{t_{12}}$ в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и координатами $\mathbf{x_{22}}$ и $\mathbf{y_{22}}$ тела 2 в момент времени $\boldsymbol{t_{22}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

$$x_{12} = \beta \cdot [x_{22} + (V \cdot t_{22})] \qquad (202)$$

$$y_{12} = y_{22} \qquad (203)$$

С помощью формулы (38) можно написать связь между значениями времен $\boldsymbol{t_{11}}$, $\boldsymbol{t_{21}}$ и $\boldsymbol{t_{12}}$, $\boldsymbol{t_{22}}$:

$$t_{11} = \frac{(\beta^2 - 1) \cdot x_{21}}{\beta \cdot V} + (\beta \cdot t_{21}) \qquad (204)$$

$$t_{12} = \frac{(\beta^2 - 1) \cdot x_{22}}{\beta \cdot V} + (\beta \cdot t_{22}) \qquad (205)$$

В рассматриваемом примере нас будет интересовать положение тел 1 и 2 в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ в один и тот же момент времени, т.е. когда:

$$t_{11} \quad = \quad t_{12} \qquad (206)$$

Тогда уравнение (206) с учетом формул (196), (198), (200), (202), (204) и (205) примет вид:

$$\frac{(\beta^2 - 1) \cdot \mathrm{R} \cdot \cos(\omega \cdot t_{21})}{\beta \ \cdot \ \mathrm{V}} + (\beta \cdot t_{21}) \ =$$

$$= \frac{(1 - \beta^2) \cdot \mathrm{R} \ \cdot \cos(\omega \cdot t_{22})}{\beta \ \cdot \ \mathrm{V}} + (\beta \cdot t_{22}) \qquad (207)$$

В подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ при выполнении условия (206) представляет интерес положение тел 1 и 2, когда:

$$t_{21} = t_{22} = t_{2\text{р}} \qquad (208)$$

Подставив условие (208) в уравнение (207) для случая, когда $\mathbf{(\omega \cdot t_{2р}) < \pi}$, получим:

$$\omega \cdot t_{2\text{р}} = \frac{\pi}{2} \qquad (209)$$

Т.е. для выполнения условий (206) и (208) тела 1 и 2 в рассматриваемые моменты времени должны находиться на линии, параллельной оси $\mathbf{O_2y_2}$ ($\mathbf{O_1y_1}$).

Также в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ при выполнении условия (206) представляет интерес положение тел 1 и 2, когда:

$$t_{21} = 0 \qquad (210)$$

Значение времени $\boldsymbol{t_{22}}$ при выполнении условий (206) и (210) обозначим $\boldsymbol{t_{22т}}$, для которого уравнение (207) примет вид:

$$t_{22\text{т}} = \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \cdot \ [1 + \ \cos(\omega \cdot t_{22\text{т}})] \ \cdot \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{V}} \qquad (211)$$

или:

$$\omega \cdot t_{22\text{т}} = \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \cdot \ [1 + \ \cos(\omega \cdot t_{22\text{т}})] \ \cdot \frac{v}{\mathrm{V}} \qquad (212)$$

Как видно из уравнения (212), значение времени $t_{22т}$ в зависимости от значения коэффициента перехода **β** может быть:

- $t_{22т} > 0$ при $\beta > 1$; (213)
- $t_{22т} < 0$ при $0 < \beta < 1$; (214)
- $t_{22т} = 0$ при $\beta = 1$. (215)

Теперь можем приступить к проверке выполнения закона сохранения импульса (закона сохранения кинетической энергии).

Рассмотрим два момента времени в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$.

3.2.1.1. Момент времени $t_{1р}$

Согласно условиям (206) и (208) для тел 1 и 2, моменту времени $t_{1р}$ в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ будет соответствовать момент времени $t_{2р}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$.

Как показано на рис. 7, согласно уравнениям (209), (192)÷(195) в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ в момент времени $t_{2р}$ тела 1 и 2 соответственно имеют следующие значения проекций $\upsilon_{21xр}$, $\upsilon_{21yр}$ и $\upsilon_{22xр}$, $\upsilon_{22yр}$ скоростей своего движения на оси $\mathbf{O_2x_2}$ и $\mathbf{O_2y_2}$:

$$v_{21\text{xр}} = -\,v \qquad (216)$$

$$v_{21\text{yр}} = 0 \qquad (217)$$

$$v_{22\text{xр}} = v \qquad (218)$$

$$v_{22\text{yр}} = 0 \qquad (219)$$

Тогда, исходя из формул (40), (42) и равенств (216)÷(219), в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ в момент времени $t_{1р}$ тело 1 и тело 2 соответственно будут иметь следующие значения проекций $\upsilon_{11xр}$, $\upsilon_{11yр}$ и $\upsilon_{12xр}$, $\upsilon_{12yр}$ скоростей своего движения на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$:

$$v_{11\text{xр}} = \frac{\mathrm{V} - v}{1 - \dfrac{(\beta^2 - 1)\cdot v}{\beta^2 \cdot \mathrm{V}}} \qquad (220)$$

$$v_{11\text{yр}} = 0 \qquad (221)$$

$$v_{12xp} = \frac{V + v}{\frac{(\beta^2 - 1) \cdot v}{\beta^2 \cdot V} + 1} \qquad (222)$$

$$v_{12yp} = 0 \qquad (223)$$

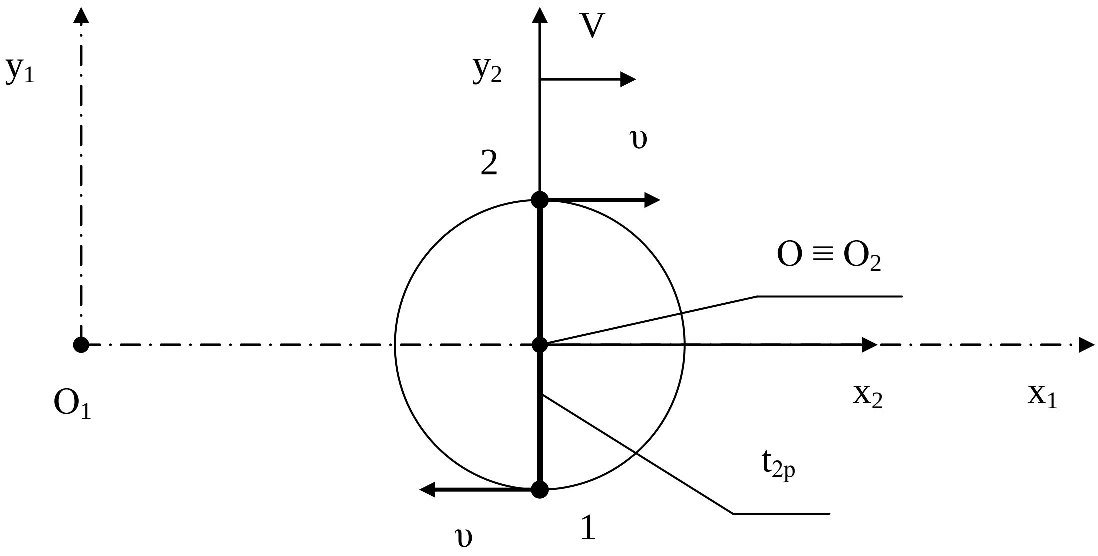

Рис. 7

3.2.1.2. Момент времени $t_{1т}$

Согласно условиям (206) и (210) моменту времени $t_{1т}$ в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ будет соответствовать момент времени $t_{21} = 0$ для тела 1 и момент времени $t_{22т}$ для тела 2 в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$.

Как показано на рис. 8, в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ в момент времени $t_{21} = 0$ тело 1 и в момент времени $t_{22т}$ тело 2 соответственно имеют следующие значения проекций $\upsilon_{21xт}$, $\upsilon_{21yт}$ и $\upsilon_{22xт}$, $\upsilon_{22yт}$ скоростей своего движения на оси $\mathbf{O_2x_2}$ и $\mathbf{O_2y_2}$, причем:

$$v_{21xт} = 0 \qquad (224)$$

$$v_{21yт} = -v \qquad (225)$$

Тогда, исходя из формул (40), (42) и равенств (224), (225) в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ в момент времени $t_{1т}$ тело 1 и тело 2 соответственно будут иметь значения проекций $\upsilon_{11xт}$, $\upsilon_{11yт}$ и $\upsilon_{12xт}$, $\upsilon_{12yт}$

скоростей своего движения на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$, причем :

$$v_{11\text{хт}} = \mathrm{V} \qquad (226)$$

$$v_{11\text{ут}} = -\frac{v}{\beta} \qquad (227)$$

$$v_{12\text{хт}} = \frac{\mathrm{V} + v_{22\text{хт}}}{\frac{(\beta^2 - 1)\cdot v_{22\text{хт}}}{\beta^2 \cdot \mathrm{V}} + 1} \qquad (228)$$

$$v_{12\text{ут}} = \frac{v_{22\text{ут}}}{\frac{(\beta^2 - 1)\cdot v_{22\text{хт}}}{\beta \cdot \mathrm{V}} + \beta} \qquad (229)$$

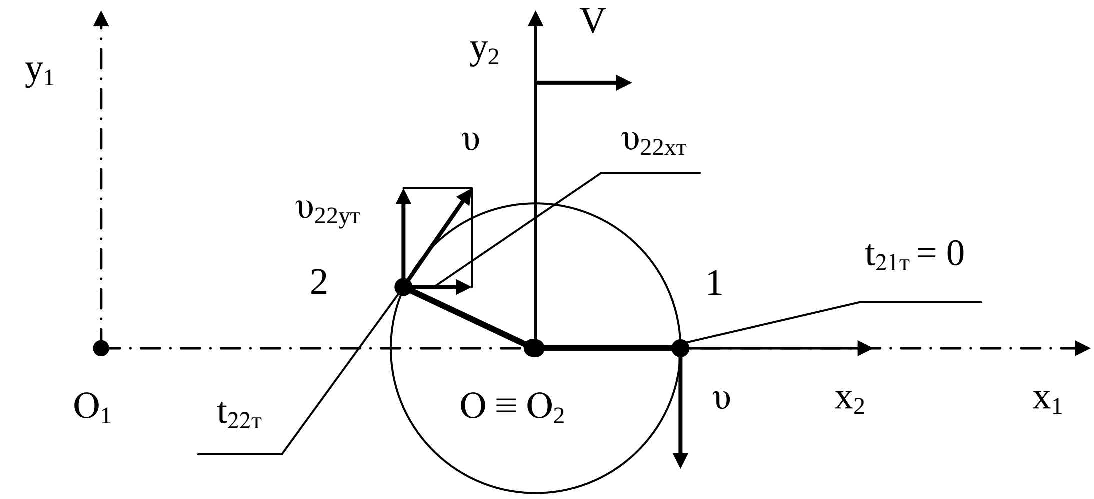

Рис. 8

Учитывая условие (213), что при коэффициенте перехода $\boldsymbol{\beta} > \mathbf{1}$ время $t_{22\text{т}} > 0$, можно отметить, что при коэффициенте перехода $\boldsymbol{\beta} > \mathbf{1}$ проекция скорости $\boldsymbol{\upsilon_{22\text{ут}}}$ будет направлена по направлению оси $\mathbf{O_2y_2}$.

Также, исходя из условия (214), утверждающего, что при коэффициенте перехода $\mathbf{0} < \boldsymbol{\beta} < \mathbf{1}$ время $t_{22\text{т}} < 0$, можно отметить, что при коэффициенте перехода $\mathbf{0} < \boldsymbol{\beta} < \mathbf{1}$ проекция скорости $\boldsymbol{\upsilon_{22\text{ут}}}$ будет иметь направление, противоположное направлению оси $\mathbf{O_2y_2}$.

Из уравнений (194) и (195) можно получить:

$$v_{22\text{хт}}{}^2 + v_{22\text{хт}}{}^2 = v^2 \qquad (230)$$

3.2.1.3. Уравнения закона сохранения импульса и закона

сохранения механической энергии для примера № 3

В неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ в момент времени $\boldsymbol{t_{1р}}$ тело 1 и тело 2 соответственно будут иметь следующие значения кинетических энергий $\mathbf{E_{к11р}}$ и $\mathbf{E_{к12р}}$ и проекций $\mathbf{P_{11xр}}$, $\mathbf{P_{11yр}}$ и $\mathbf{P_{12xр}}$, $\mathbf{P_{12yр}}$ импульсов на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$:

$$\mathrm{P_{11xр}} \ = \ \mathrm{M_0} \ \cdot \ \mathrm{f}\big(\mathrm{V} = v_{11\mathrm{xр}}\big) \ \cdot \ v_{11\mathrm{xр}} \qquad (231)$$

$$\mathrm{P_{12xр}} \ = \ \mathrm{M_0} \ \cdot \ \mathrm{f}\big(\mathrm{V} = v_{12\mathrm{xр}}\big) \ \cdot \ v_{12\mathrm{xр}} \qquad (232)$$

$$\mathrm{P_{11yр}} \ = \ 0 \qquad (233)$$

$$\mathrm{P_{12yр}} \ = \ 0 \qquad (234)$$

$$\mathrm{E_{k11р}} \ = \ \mathrm{M_0} \ \cdot \int\limits_0^{v_{11\mathrm{xр}}} \{[\mathrm{f(V)} \ \cdot \ \mathrm{V}] \ + \ [\mathrm{f'(V)} \ \cdot \ \mathrm{V^2}]\} \ \cdot \ \mathrm{dV} \qquad (235)$$

$$\mathrm{E_{k12р}} \ = \ \mathrm{M_0} \ \cdot \int\limits_0^{v_{12\mathrm{xр}}} \{[\mathrm{f(V)} \ \cdot \ \mathrm{V}] \ + \ [\mathrm{f'(V)} \ \cdot \ \mathrm{V^2}]\} \ \cdot \ \mathrm{dV} \qquad (236)$$

В неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ в момент времени $\boldsymbol{t_{1т}}$ тело 1 и тело 2 соответственно будут иметь следующие значения кинетических энергий $\mathbf{E_{к11т}}$ и $\mathbf{E_{к12т}}$ и проекций $\mathbf{P_{11xт}}$, $\mathbf{P_{11yт}}$ и $\mathbf{P_{12xт}}$, $\mathbf{P_{12yт}}$ импульсов на оси $\mathbf{O_1x_1}$ и $\mathbf{O_1y_1}$:

$$\mathrm{P_{11xт}} \ = \ \mathrm{M_0} \ \cdot \ \mathrm{f}\left[\mathrm{V} = \sqrt{v_{11\mathrm{xт}}^2 + v_{11\mathrm{yт}}^2}\right] \ \cdot \ v_{11\mathrm{xт}} \qquad (237)$$

$$\mathrm{P_{12xт}} \ = \ \mathrm{M_0} \ \cdot \ \mathrm{f}\left[\mathrm{V} = \sqrt{v_{12\mathrm{xт}}^2 + v_{12\mathrm{yт}}^2}\right] \ \cdot \ v_{12\mathrm{xт}} \qquad (238)$$

$$\mathrm{P_{11yт}} \ = \ \mathrm{M_0} \ \cdot \ \mathrm{f}\left[\mathrm{V} = \sqrt{v_{11\mathrm{xт}}^2 + v_{11\mathrm{yт}}^2}\right] \ \cdot \ v_{11\mathrm{yт}} \qquad (239)$$

$$\mathrm{P_{12yт}} \ = \ \mathrm{M_0} \ \cdot \ \mathrm{f}\left[\mathrm{V} = \sqrt{v_{12\mathrm{xт}}^2 + v_{12\mathrm{yт}}^2}\right] \ \cdot \ v_{12\mathrm{yт}} \qquad (240)$$

$$\mathrm{E_{k11т}} \ = \ \mathrm{M_0} \ \cdot \int\limits_0^{\sqrt{v_{11\mathrm{xт}}^2 + v_{11\mathrm{yт}}^2}} \{[\mathrm{f(V)} \ \cdot \ \mathrm{V}] \ + \ [\mathrm{f'(V)} \ \cdot \ \mathrm{V^2}]\} \ \cdot \ \mathrm{dV} \qquad (241)$$

$$E_{к12т} = M_0 \cdot \int_0^{\sqrt{v_{12хт}^2 + v_{12ут}^2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \qquad (242)$$

В связи с тем, что механическая система тел 1 и 2 (и нити 3) является замкнутой, закон сохранения импульса позволяет записать для моментов времени $\mathbf{t_{1р}}$ и $\mathbf{t_{1т}}$ следующие уравнения:

$$P_{11хр} + P_{12хр} = P_{11хт} + P_{12хт}$$

или

$$\{M_0 \cdot f(V = v_{11хр}) \cdot v_{11хр}\} + \{M_0 \cdot f(V = v_{12хр}) \cdot v_{12хр}\} =$$

$$= \left\{M_0 \cdot f\left[V = \sqrt{v_{11хт}^2 + v_{11ут}^2}\right] \cdot v_{11хт}\right\} +$$

$$+ \left\{M_0 \cdot f\left[V = \sqrt{v_{12хт}^2 + v_{12ут}^2}\right] \cdot v_{12хт}\right\} \qquad (243)$$

$$P_{11ур} + P_{12ур} = P_{11ут} + P_{12ут}$$

или

$$0 = \left\{M_0 \cdot f\left[V = \sqrt{v_{11хт}^2 + v_{11ут}^2}\right] \cdot v_{11ут}\right\} +$$

$$+ \left\{M_0 \cdot f\left[V = \sqrt{v_{12хт}^2 + v_{12ут}^2}\right] \cdot v_{12ут}\right\} \qquad (244)$$

Также в связи с тем, что механическая система тел 1 и 2 (и нити 3) является замкнутой и потенциальные энергии тел 1 и 2 не изменяются и являются постоянными величинами, закон сохранения механической энергии позволяет записать для моментов времени $\boldsymbol{t_{1р}}$ и $\boldsymbol{t_{1т}}$ следующее уравнение:

$$E_{к11р} + E_{к12р} = E_{к11т} + E_{к12т}$$

или

$$\langle M_0 \cdot \int_0^{v_{11хр}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV\rangle +$$

$$+ \langle M_0 \cdot \int_0^{v_{12\text{хр}}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle =$$

$$= \langle M_0 \cdot \int_0^{\sqrt{v_{11\text{хт}}^2 + v_{11\text{ут}}^2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle +$$

$$+ \langle M_0 \cdot \int_0^{\sqrt{v_{12\text{хт}}^2 + v_{12\text{ут}}^2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle \qquad (245)$$

3.2.1.4. Определение условий выполнения закона сохранения импульса для примера № 3 при коэффициенте перехода $\boldsymbol{\beta \geq 1}$

В случае, если коэффициент перехода $\boldsymbol{\beta \geq 1}$, то значения коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ и функции **f (V)** определяются:

$$\beta_{>}^2 = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{v_{\text{хкр}1}^2}} \qquad (59)$$

$$f(V)_{>} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{\text{хкр}1}^2}}} \qquad (149)$$

Тогда с учетом формулы (149) уравнения (243) и (244) примут вид:

$$\frac{M_0 \cdot v_{11\text{хр}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{11\text{хр}}^2}{v_{\text{хкр}1}^2}}} + \frac{M_0 \cdot v_{12\text{хр}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{12\text{хр}}^2}{v_{\text{хкр}1}^2}}} = \frac{M_0 \cdot v_{11\text{хт}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{11\text{хт}}^2 + v_{11\text{ут}}^2}{v_{\text{хкр}1}^2}}} + \frac{M_0 \cdot v_{12\text{хт}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{12\text{хт}}^2 + v_{12\text{ут}}^2}{v_{\text{хкр}1}^2}}} \qquad (246)$$

$$0 = \frac{M_0 \cdot v_{11\text{ут}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{11\text{хт}}^2 + v_{11\text{ут}}^2}{v_{\text{хкр}1}^2}}} + \frac{M_0 \cdot v_{12\text{ут}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{12\text{хт}}^2 + v_{12\text{ут}}^2}{v_{\text{хкр}1}^2}}} \qquad (247)$$

Формулы (220)÷(223) и (226)÷(229) с учетом формулы (59) можно записать:

$$v_{11\text{хр}} = \frac{\mathrm{V} - v}{1 - \frac{\mathrm{V} \cdot v}{\mathrm{v}^2_{\text{хкр}1}}} \qquad (248)$$

$$v_{12\text{хр}} = \frac{\mathrm{V} + v}{1 + \frac{\mathrm{V} \cdot v}{\mathrm{v}^2_{\text{хкр}1}}} \qquad (249)$$

$$v_{11\text{хт}} = \mathrm{V} \qquad (226)$$

$$v_{11\text{ут}} = -\left(v \cdot \sqrt{1 - \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}^2_{\text{хкр}1}}}\right) \qquad (250)$$

$$v_{12\text{хт}} = \frac{\mathrm{V} + v_{22\text{хт}}}{1 + \frac{\mathrm{V} \cdot v_{22\text{хт}}}{\mathrm{v}^2_{\text{хкр}1}}} \qquad (251)$$

$$v_{12\text{ут}} = \frac{v_{22\text{ут}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}^2_{\text{хкр}1}}}}{1 + \frac{\mathrm{V} \cdot v_{22\text{хт}}}{\mathrm{v}^2_{\text{хкр}1}}} \qquad (252)$$

Вставив проекции скоростей $\boldsymbol{v}_{\mathbf{11хр}}$, $\boldsymbol{v}_{\mathbf{12хр}}$, $\boldsymbol{v}_{\mathbf{11хт}}$, $\boldsymbol{v}_{\mathbf{11ут}}$, $\boldsymbol{v}_{\mathbf{12хт}}$ и $\boldsymbol{v}_{\mathbf{12ут}}$ из формул (226), (248)÷(252) в уравнения (246) и (247) и используя формулу (230), получим:

$$\frac{\mathrm{M}_0 \cdot (\mathrm{V} - v)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{v}^2_{\text{хкр}1}}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}^2_{\text{хкр}1}}}} + \frac{\mathrm{M}_0 \cdot (\mathrm{V} + v)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{v}^2_{\text{хкр}1}}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}^2_{\text{хкр}1}}}} =$$

$$= \frac{\mathrm{M}_0 \cdot \mathrm{V}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{v}^2_{\text{хкр}1}}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}^2_{\text{хкр}1}}}} + \frac{\mathrm{M}_0 \cdot (\mathrm{V} + v_{22\text{хт}})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{v}^2_{\text{хкр}1}}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}^2_{\text{хкр}1}}}} \qquad (253)$$

$$0 = -\frac{\mathrm{M}_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{v}^2_{\text{хкр}1}}}} + \frac{\mathrm{M}_0 \cdot v_{22\text{ут}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{v}^2_{\text{хкр}1}}}} \qquad (254)$$

или:

$$\mathrm{V} - v + \mathrm{V} + v = \mathrm{V} + \mathrm{V} + v_{22\text{хт}}$$

$$0 = -v + v_{22y\text{т}}$$

Из уравнений (253) и (254) получаем необходимые условия (значения проекций скоростей $\boldsymbol{\upsilon}_{22\text{хт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon}_{22\text{ут}}$), при которых в примере № 3 при коэффициенте перехода $\boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{1}$ будет выполняться закон сохранения импульса в неподвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

$$v_{22\text{хт}} = 0 \qquad (255)$$

$$v_{22y\text{т}} = v \qquad (256)$$

Из равенств (255) и (256) следует, что величины проекций скоростей $\boldsymbol{\upsilon}_{22\text{хт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon}_{22\text{ут}}$ не зависят от величины скорости **V** (и, следовательно, не зависят от величины коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$).

Подставив условия (255) и (256) в уравнения (194) и (195), получим:

$$t_{22\text{т}} = t_{21\text{т}} = 0 \qquad (257)$$

А подставив уравнение (257) в формулу (212):

$$\omega \cdot 0 = \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \cdot [1 + 1] \cdot \frac{v}{\mathrm{V}} \qquad (258)$$

будем иметь еще одно условие выполнения закона сохранения импульса в неподвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ для примера № 3:

$$\beta = 1 \qquad (259)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что в замкнутой механической системе тел, рассматриваемой в примере № 3, для значений коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta>1}$ закон сохранения импульса не выполняется.

3.2.1.5. Определение условий выполнения закона сохранения механической энергии для примера № 3 при коэффициенте перехода $\boldsymbol{\beta \geq 1}$

В дополнение к условиям выполнения закона сохранения импульса постараемся определить условия выполнения закона сохранения механической энергии.

С учетом формулы (149) уравнение (245) примет вид:

$$\left[\mathrm{M}_0\cdot \mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_{11\text{хр}}^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}}}-1\right)\right]+\left[\mathrm{M}_0\cdot \mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_{12\text{хр}}^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}}}-1\right)\right]=$$

$$=\left[\mathrm{M}_0\ \cdot\ \mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_{11\text{хт}}^2+v_{11\text{ут}}^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}}}\ -1\right)\right]+$$

$$+\left[\mathrm{M}_0\ \cdot\ \mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_{12\text{хт}}^2+v_{12\text{ут}}^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}}}\ -1\right)\right] \qquad (260)$$

Вставив проекции скоростей $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{11хр}}$, $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{12хр}}$, $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{11хт}}$, $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{11ут}}$, $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{12хт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{12ут}}$ из формул (226), (248)÷(252) в уравнение (260), с учетом формулы (230) получим:

$$\frac{\left(1-\frac{v\cdot \mathrm{V}}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}\right)\cdot \mathrm{v}_{\text{хкр}1}}{\sqrt{\left(1-\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}\right)\cdot\left(\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2-v^2\right)}}+\frac{\left(1+\frac{v\cdot \mathrm{V}}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}\right)\cdot \mathrm{v}_{\text{хкр}1}}{\sqrt{\left(1-\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}\right)\cdot\left(\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2-v^2\right)}}=$$

$$=\frac{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}}{\sqrt{\left(1-\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}\right)\cdot\left(\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2-v^2\right)}}+\frac{\left(1+\frac{v_{22\text{хт}}\cdot \mathrm{V}}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}\right)\cdot \mathrm{v}_{\text{хкр}1}}{\sqrt{\left(1-\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}\right)\cdot\left(\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2-v^2\right)}} \qquad (261)$$

Или:

$$1-\frac{v\cdot \mathrm{V}}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}+1+\frac{v\cdot \mathrm{V}}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}=1+1+\frac{v_{22\text{хт}}\cdot \mathrm{V}}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2}$$

Из уравнения (261) получаем необходимое условие (значение проекции скорости $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{22хт}}$), при котором в примере № 3 при коэффициенте перехода $\boldsymbol{\beta \geq 1}$ в неподвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ будет выполняться закон сохранения механической энергии, предполагая, что потенциальная энергия системы тел 1 и 2 не меняется:

$$v_{22\text{хт}} = 0 \qquad (255)$$

Тогда, исходя из формулы (230), получим:

$$v_{22y\text{т}} = v \qquad (256)$$

Это позволяет сделать вывод: условием для выполнения закона сохранения механической энергии (как и условием для выполнения закона сохранения импульса) в неподвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ для примера № 3 является:

$$\beta = 1 \qquad (259)$$

Таким образом, получается, что в замкнутой механической системе тел, рассматриваемой в примере № 3, для значений коэффициента перехода **β>1** закон сохранения механической энергии не выполняется.

Аналогично может быть доказано, что в замкнутой механической системе тел, рассматриваемой в примере № 3, для значений коэффициента перехода **β>1** закон сохранения момента импульса не будет выполняться.

Подтвердим вышесказанное числовыми расчетами.

3.2.1.6. Цифровой расчет для примера № 3 при коэффициенте перехода β > 1

Предположим, что:

$\mathbf{V} / \mathbf{v_{хкр1}} = 0{,}9$, $\boldsymbol{\upsilon} / \mathbf{v_{хкр1}} = 0{,}6$.

Уравнение (212) с учетом формулы (59) можно записать в виде:

$$\omega \cdot t_{22\text{т}} = \frac{v \cdot \mathrm{V} \cdot [1 + \cos(\omega \cdot t_{22\text{т}})]}{\mathrm{v}_{\text{хкр}1}^2} \qquad (262)$$

Тогда получим:

$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t_{22т}} = 0{,}8828669738$, проекции $\boldsymbol{\upsilon_{22хт}} / \mathbf{v_{хкр1}} = 0{,}4635374427$ и $\boldsymbol{\upsilon_{22ут}} / \mathbf{v_{хкр1}} = 0{,}3809633042$ скорости движения тела 2 в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$.

В неподвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

а) в момент времени $\boldsymbol{t}_{\mathbf{1p}}$:

<table>
<tr><th>Момент времени</th><th>Объект</th><th>Величина</th><th>Значение величины</th></tr>
<tr><td rowspan="7">$\boldsymbol{t}_{\mathbf{1p}}$</td><td rowspan="2">Тело 1</td><td>проекция импульса на ось $\mathbf{O_1x_1}$
$\mathbf{К_{11xp} / (M_o{\cdot}v_{xкp1})}$</td><td>0,860309002</td></tr>
<tr><td>кинетическая энергия
$\mathbf{E_{к11p} / (M_o{\cdot}v_{xкp1}^2)}$</td><td>0,31914047</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Тело 2</td><td>проекция импульса на ось $\mathbf{O_1x_1}$
$\mathbf{К_{12xp} / (M_o{\cdot}v_{xкp1})}$</td><td>4,30154501</td></tr>
<tr><td>кинетическая энергия
$\mathbf{E_{к12p} / (M_o{\cdot}v_{xкp1}^2)}$</td><td>3,416252877</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Система тел 1 и 2</td><td>проекция импульса на ось $\mathbf{O_1x_1}$
$\mathbf{К_{12x\Sigma p} / (M_o{\cdot}v_{xкp1})}$</td><td>5,161854012</td></tr>
<tr><td>проекция импульса на ось $\mathbf{O_1\ y_1}$
$\mathbf{К_{12y\Sigma p} / (M_o{\cdot}v_{xкp1})}$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>кинетическая энергия
$\mathbf{E_{кp} / (M_o{\cdot}v_{xкp1}^2)}$</td><td>3,735393347</td></tr>
</table>

б) в момент времени $\mathbf{t_{1т}}$:

Момент времени	Объект	Величина	Значение величины
$\mathbf{t_{1т}}$	Тело 1	проекция импульса на ось $\mathbf{O_1x_1}$ $\mathbf{К_{11xт} / (M_o \cdot v_{xкр1})}$	2,580927006
		проекция импульса на ось $\mathbf{O_1\ y_1}$ $\mathbf{К_{11yт} / (M_o \cdot v_{xкр1})}$	– 0,75
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к11т} / (M_o \cdot v_{xкр1}{}^2)}$	1,092373316
	Тело 2	проекция импульса на ось $\mathbf{O_1x_1}$ $\mathbf{К_{12xт} / (M_o \cdot v_{xкр1})}$	3,9102117884
		проекция импульса на ось $\mathbf{O_1\ y_1}$ $\mathbf{К_{12yт} / (M_o \cdot v_{xкр1})}$	0,4762041303
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к12т} / (M_o \cdot v_{xкр1}{}^2)}$	3,064052977
	Система тел 1 и 2	проекция импульса на ось $\mathbf{O_1x_1}$ $\mathbf{К_{12x\Sigma т} /(M_o \cdot v_{xкр1})}$	6,491138794
		проекция импульса на ось $\mathbf{O_1\ y_1}$ $\mathbf{К_{12y\Sigma т} / (M_o \cdot v_{xкр1})}$	– 0,2737958696
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{кт} / (M_o \cdot v_{xкр1}{}^2)}$	4,931749651

Закон сохранения импульса не выполняется, т.к.: 5,161854012 # 6,491138794 и – 0,2737958696 # 0 .

Закон сохранения кинетической энергии не выполняется, т.к.: 3,735393347 # 4,931749651.

3.2.1.7. Определение условий выполнения закона сохранения импульса для примера № 3 при коэффициенте перехода $0 < \beta \leq 1$

В случае, если коэффициент перехода $\mathbf{0 < \beta \leq 1}$, то значения коэффициента перехода **β** и функции **f (V)** определяются:

$$\beta^2_{<} = \frac{1}{1+\frac{V^2}{v^2_{\text{хкр}2}}} \qquad (60)$$

$$f(V)_{<} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{V^2}{v^2_{\text{хкр}2}}}} \qquad (170)$$

Тогда, с учетом формулы (170) уравнения (243) и (244) примут вид:

$$\frac{M_0 \cdot v_{11\text{хр}}}{\sqrt{1+\frac{v^2_{11\text{хр}}}{v^2_{\text{хкр}2}}}} + \frac{M_0 \cdot v_{12\text{хр}}}{\sqrt{1+\frac{v^2_{12\text{хр}}}{v^2_{\text{хкр}2}}}} = \frac{M_0 \cdot v_{11\text{хт}}}{\sqrt{1+\frac{v^2_{11\text{хт}}+v^2_{11\text{ут}}}{v^2_{\text{хкр}2}}}} + \frac{M_0 \cdot v_{12\text{хт}}}{\sqrt{1+\frac{v^2_{12\text{хт}}+v^2_{12\text{ут}}}{v^2_{\text{хкр}2}}}} \qquad (263)$$

$$0 = \frac{M_0 \cdot v_{11\text{ут}}}{\sqrt{1+\frac{v^2_{11\text{хт}}+v^2_{11\text{ут}}}{v^2_{\text{хкр}2}}}} + \frac{M_0 \cdot v_{12\text{ут}}}{\sqrt{1+\frac{v^2_{12\text{хт}}+v^2_{12\text{ут}}}{v^2_{\text{хкр}2}}}} \qquad (264)$$

Формулы (220)÷(223) и (226)÷(229) с учетом формулы (60) можно записать:

$$v_{11\text{хр}} = \frac{V - v}{1+\frac{V \cdot v}{v^2_{\text{хкр}2}}} \qquad (265)$$

$$v_{12\text{хр}} = \frac{V + v}{1-\frac{V \cdot v}{v^2_{\text{хкр}2}}} \qquad (266)$$

$$v_{11\text{хт}} = V \qquad (226)$$

$$v_{11\text{ут}} = -\left(v \cdot \sqrt{1+\frac{V^2}{v^2_{\text{хкр}2}}}\right) \qquad (267)$$

$$v_{12\text{хт}} = \frac{V + v_{22\text{хт}}}{1-\frac{V \cdot v_{22\text{хт}}}{v^2_{\text{хкр}2}}} \qquad (268)$$

$$v_{12\text{ут}} = \frac{v_{22\text{ут}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}2}^2}}}{1 - \frac{\mathrm{V} \cdot v_{22\text{хт}}}{\mathrm{v}_{\text{хкр}2}^2}} \qquad (269)$$

Вставив проекции скоростей $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{11хр}}$, $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{12хр}}$, $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{11хт}}$, $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{11ут}}$, $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{12хт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{12ут}}$ из формул (226), (265)÷(269) в уравнения (263) и (264) и используя формулу (230), получим:

$$\frac{\mathrm{M}_0 \cdot (\mathrm{V} - v)}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}2}^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}2}^2}}} + \frac{\mathrm{M}_0 \cdot (\mathrm{V} + v)}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}2}^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}2}^2}}} =$$

$$= \frac{\mathrm{M}_0 \cdot \mathrm{V}}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}2}^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}2}^2}}} + \frac{\mathrm{M}_0 \cdot (\mathrm{V} + v_{22\text{хт}})}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}2}^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}2}^2}}} \qquad (270)$$

$$0 = -\frac{\mathrm{M}_0 \cdot v}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}2}^2}}} + \frac{\mathrm{M}_0 \cdot v_{22y\text{т}}}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}2}^2}}} \qquad (271)$$

или:

$$\mathrm{V} - v + \mathrm{V} + v = \mathrm{V} + \mathrm{V} + v_{22\text{хт}}$$

$$0 = -v + v_{22y\text{т}}$$

Из уравнений (270) и (271) получаем необходимые условия (значения $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{22хт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{22ут}}$), при которых в примере № 3 при коэффициенте перехода $\mathbf{0} < \boldsymbol{\beta} \leq \mathbf{1}$ будет выполняться закон сохранения импульса в неподвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

$$v_{22\text{хт}} = 0 \qquad (255)$$

$$v_{22y\text{т}} = v \qquad (256)$$

Из равенств (255) и (256) следует, что величины проекций скоростей $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{22хт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{22ут}}$ не зависят от величины скорости **V** (и, следовательно, не зависят от величины коэффициента перехода **β**).

Подставив условия (255) и (256) в уравнения (194) и (195), получим:

$$t_{22т} \ = \ t_{21т} \ = 0 \qquad (257)$$

А подставив уравнение (257) в формулу (212):

$$\omega \cdot 0 \ = \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \cdot \ [1 + \ 1] \ \cdot \ \frac{v}{V} \qquad (258)$$

будем иметь еще одно условие выполнения закона сохранения импульса в неподвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ для примера № 3:

$$\beta = 1 \qquad (259)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что в замкнутой механической системе тел, рассматриваемой в примере № 3, для значений коэффициента перехода $\mathbf{0 < \beta < 1}$ закон сохранения импульса не выполняется.

3.2.1.8. Определение условий выполнения закона сохранения механической энергии для примера № 3 при коэффициенте перехода $\mathbf{0 < \beta < 1}$

В дополнение к условиям выполнения закона сохранения импульса постараемся определить условия выполнения закона сохранения механической энергии.

С учетом формулы (170) уравнение (245) примет вид:

$$\left[\mathrm{M_0} \cdot \mathrm{v}_{\text{хкр}2}^2 \cdot \left(1 \ - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_{11\text{хр}}^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}2}^2}}} \right)\right] + \left[\mathrm{M_0} \cdot \mathrm{v}_{\text{хкр}2}^2 \cdot \left(1 \ - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_{12\text{хр}}^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}2}^2}}} \right)\right] =$$

$$= \left[\mathrm{M_0} \ \cdot \ \mathrm{v}_{\text{хкр}2}^2 \cdot \left(1 \ - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_{11\text{хт}}^2 + v_{11\text{ут}}^2}{\mathrm{v}_{\text{хкр}2}^2}}} \right)\right] +$$

$$+\left[\mathrm{M}_0 \cdot \mathrm{v}_{\text{xкр}2}^2 \cdot \left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v_{12\text{xт}}^2+v_{12\text{yт}}^2}{\mathrm{v}_{\text{xкр}2}^2}}}\right)\right] \quad (272)$$

Вставив проекции скоростей $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{11xp}}$, $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{12xp}}$, $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{11xт}}$, $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{11yт}}$, $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{12xт}}$ и $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{12yт}}$ из формул (226), (265)÷(269) в уравнение (272), с учетом формулы (230), получим:

$$\frac{\left(1+\frac{v\cdot \mathrm{V}}{\mathrm{v}_{\text{xкр}2}^2}\right)\cdot \mathrm{v}_{\text{xкр}2}}{\sqrt{\left(1+\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}_{\text{xкр}2}^2}\right)\cdot\left(\mathrm{v}_{\text{xкр}2}^2+v^2\right)}}+\frac{\left(1-\frac{v\cdot \mathrm{V}}{\mathrm{v}_{\text{xкр}1}^2}\right)\cdot \mathrm{v}_{\text{xкр}2}}{\sqrt{\left(1+\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}_{\text{xкр}2}^2}\right)\cdot\left(\mathrm{v}_{\text{xкр}2}^2+v^2\right)}}=$$

$$=\frac{\mathrm{v}_{\text{xкр}2}}{\sqrt{\left(1+\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}_{\text{xкр}2}^2}\right)\cdot\left(\mathrm{v}_{\text{xкр}2}^2+v^2\right)}}+\frac{\left(1-\frac{v_{22\text{xт}}\cdot \mathrm{V}}{\mathrm{v}_{\text{xкр}2}^2}\right)\cdot \mathrm{v}_{\text{xкр}2}}{\sqrt{\left(1+\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{v}_{\text{xкр}2}^2}\right)\cdot\left(\mathrm{v}_{\text{xкр}2}^2+v^2\right)}} \quad (273)$$

Или:

$$1+\frac{v\cdot \mathrm{V}}{\mathrm{v}_{\text{xкр}2}^2}+1-\frac{v\cdot \mathrm{V}}{\mathrm{v}_{\text{xкр}2}^2}=1+1-\frac{v_{22\text{xт}}\cdot \mathrm{V}}{\mathrm{v}_{\text{xкр}2}^2}$$

Из уравнения (273) получаем необходимое условие (значение проекции скорости $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{22xт}}$), при котором в примере № 3 при коэффициенте перехода $\mathbf{0 < \beta < 1}$ в неподвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ будет выполняться закон сохранения механической энергии, предполагая, что потенциальная энергия системы тел 1 и 2 не меняется:

$$v_{22\text{xт}}=0 \quad (255)$$

Тогда, исходя из формулы (230), получим:

$$v_{22y\text{т}}=v \quad (256)$$

Это позволяет сделать вывод: условием для выполнения закона сохранения механической энергии (как и условием для выполнения закона сохранения импульса) в неподвижной инерциальной системе отсчета

$\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ для примера № 3 является:

$$\beta = 1 \qquad (259)$$

Таким образом, получается, что в замкнутой механической системе тел, рассматриваемой в примере № 3, для значений коэффициента перехода $\mathbf{0 < \beta < 1}$ закон сохранения механической энергии не выполняется.

Аналогично может быть доказано, что в замкнутой механической системе тел, рассматриваемой в примере № 3, для значений коэффициента перехода $\mathbf{0 < \beta < 1}$ закон сохранения момента импульса не будет выполняться.

Подтвердим вышесказанное числовыми расчетами.

3.2.1.9. Цифровой расчет для примера № 3 при коэффициенте перехода 0 < β < 1

Предположим, что $\mathbf{V} / \mathbf{v_{xкр2}} = 0{,}9$, $\boldsymbol{\upsilon} / \mathbf{v_{xкр2}} = 0{,}6$.

Уравнение (212) с учетом формулы (60) можно записать в виде:

$$\omega \cdot t_{22т} = -\frac{v \cdot \mathrm{V} \cdot [1 + \cos(\omega \cdot t_{22т})]}{\mathrm{v}_{xкр2}^2} \qquad (274)$$

Тогда получим:

$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t_{22т}} = -0{,}8828669738$, проекции $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{22xт}} / \mathbf{v_{xкр2}} = -0{,}4635374427$ и $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{22yт}} / \mathbf{v_{xкр2}} = 0{,}3809633042$ скорости движения тела 2 в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$.

В неподвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

а) в момент времени $\boldsymbol{t_{1p}}$:

Момент времени	Объект	Величина	Значение величины
$\boldsymbol{t_{1p}}$	Тело 1	проекция импульса на ось $\mathbf{O_1x_1}$ $\mathbf{K_{11xp} / (M_o \cdot v_{xкр2})}$	0,1912108416
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к11p} / (M_o \cdot v_{xкр2}^2)}$	0,018451013
	Тело 2	проекция импульса на ось $\mathbf{O_1x_1}$ $\mathbf{K_{12xp} / (M_o \cdot v_{xкр2})}$	0,9560542082
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к12p} / (M_o \cdot v_{xкр2}^2)}$	0,706810043
	Система тел 1 и 2	проекция импульса на ось $\mathbf{O_1x_1}$ $\mathbf{K_{12x\Sigma p} / (M_o \cdot v_{xкр2})}$	1,1472650498
		проекция импульса на ось $\mathbf{O_1\,y_1}$ $\mathbf{K_{12y\Sigma p} / (M_o \cdot v_{xкр2})}$	0
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{кp} / (M_o \cdot v_{xкр2}^2)}$	0,725261056

б) в момент времени $\mathbf{t_{1т}}$:

Момент времени	Объект	Величина	Значение величины
$\mathbf{t_{1т}}$	Тело 1	проекция импульса на ось $\mathbf{O_1x_1}$ $\mathbf{К_{11xт} / (M_o{\cdot}v_{xкр2})}$	0,5736325249
		проекция импульса на ось $\mathbf{O_1\ y_1}$ $\mathbf{К_{11yт} / (M_o{\cdot}v_{xкр2})}$	– 0,5144957554
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к11т} / (M_o{\cdot}v_{xкр2}^2)}$	0,362630528
	Тело 2	проекция импульса на ось $\mathbf{O_1x_1}$ $\mathbf{К_{12xт} / (M_o{\cdot}v_{xкр2})}$	0,2781879097
		проекция импульса на ось $\mathbf{O_1\ y_1}$ $\mathbf{К_{12yт} / (M_o{\cdot}v_{xкр2})}$	0,3266733383
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{к12т} / (M_o{\cdot}v_{xкр2}^2)}$	0,628530682
	Система тел 1 и 2	проекция импульса на ось $\mathbf{O_1x_1}$ $\mathbf{К_{12x\Sigma т} /(M_o{\cdot}v_{xкр2})}$	0,8518204346
		проекция импульса на ось $\mathbf{O_1\ y_1}$ $\mathbf{К_{12y\Sigma т} / (M_o{\cdot}v_{xкр2})}$	– 0,187822417
		кинетическая энергия $\mathbf{E_{кт} / (M_o{\cdot}v_{xкр2}^2)}$	0,991161209

Закон сохранения импульса не выполняется, т.к.: 1,1472650498 # 0,8518204346 и – 0,187822417 # 0 .

Закон сохранения кинетической энергии не выполняется, т.к.: 0,725261056 # 0,991161209.

К результатам, полученным при рассмотрении примера № 3, приведет и рассмотрение системы тел, изображенной на рис. 9, в которой тела 1 и 2, описанные в примере № 3, удерживаются не жесткой нитью, а силой притяжения тела 3 (точечного), которое будет находиться в центре **О**.

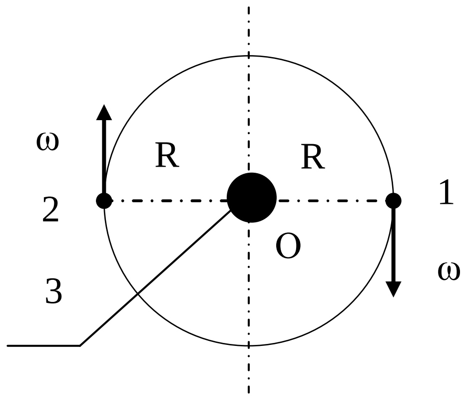

Рис. 9

3.2.1.10. Выводы

В результате рассмотрения примера № 3 было получено, что при значениях коэффициента перехода **β**, находящихся в диапазонах **β > 1** и **0 < β < 1**, в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$:

- импульс замкнутой механической системы тел 1 и 2 (и нити 3) в момент времени, когда тела 1 и 2 находятся на линии, параллельной оси $\mathbf{O_1y_1}$, не равен импульсу этой системы тел 1 и 2 (и нити 3) в любой другой момент времени, когда тела 1 и 2 не находятся на линии, параллельной оси O_1y_1, **т.е. в неподвижной (инерциальной) системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ замкнутая механическая система тел 1 и 2 (и нити 3) будет иметь меняющийся во времени импульс, что является нарушением закона сохранения импульса замкнутой механической системы тел**;

- кинетическая энергия (при неизменности потенциальной энергии системы тел 1 и 2) замкнутой механической системы тел 1 и 2 (и нити 3) в момент времени, когда тела 1 и 2 находятся на линии, параллельной оси $\mathbf{O_1y_1}$, не равна кинетической энергии этой системы тел 1 и 2 (и нити 3) в любой другой момент времени, когда тела 1 и 2 не находятся на линии, параллельной оси $\mathbf{O_1y_1}$, **т.е. в неподвижной (инерциальной) системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ замкнутая механическая система тел 1 и 2 (и нити 3) будет иметь меняющуюся во времени кинетическую энергию, что при неизменности величины потенциальной энергии системы тел 1 и 2**

является нарушением закона сохранения механической энергии замкнутой механической системы тел.

Аналогично может быть доказано, что при рассмотрении примера № 3 получим, что при значениях коэффициента перехода **β**, находящихся в диапазонах $\boldsymbol{\beta > 1}$ и $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$, в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ момент импульса замкнутой механической системы тел 1 и 2 (и нити 3) в момент времени, когда тела 1 и 2 находятся на линии, параллельной оси $\mathbf{O_1y_1}$, не равен моменту импульса этой системы тел 1 и 2 (и нити 3) в любой другой момент времени, когда тела 1 и 2 не находятся на линии, параллельной оси $\mathbf{O_1y_1}$, **т.е. в неподвижной (инерциальной) системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ замкнутая механическая система тел 1 и 2 (и нити 3) будет иметь меняющийся во времени момент импульса, что является нарушением закона сохранения момента импульса замкнутой механической системы тел**.

Изменение во времени значений импульса, кинетической энергии (при неизменности потенциальной энергии системы тел 1 и 2 (и нити 3)), момента импульса замкнутой механической системы тел 1 и 2 (и нити 3) в примере № 3 свидетельствует о том, что при значениях коэффициента перехода **β**, находящихся в диапазонах $\boldsymbol{\beta > 1}$ и $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$, имеет место невыполнение законов сохранения импульса, механической энергии и момента импульса.

Исходя из того, что законы сохранения импульса, механической энергии (при неизменности потенциальной энергии системы) и момента импульса замкнутой механической системы связаны с симметрией пространства и времени (однородностью и изотропностью пространства и однородностью времени), можно отметить, что при значениях коэффициента перехода **β**, находящихся в диапазонах $\boldsymbol{\beta > 1}$ и $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$, нарушается условие симметрии пространства и времени.

Если по определению (исходному предположению) симметричное пространство и время являются областью, в которой должна действовать специальная теория относительности, а при использовании специальной теории относительности для рассмотрении отдельного примера № 3 было отмечено нарушение условия симметрии пространства и времени при значениях коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$, находящихся в диапазонах $\boldsymbol{\beta > 1}$ и $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$, то мы имеем случай, когда есть теория, но нет области ее применения.

Т.е., в случае симметрии пространства и времени связь между координатами и временем в инерциальных системах отсчета не может быть записана с помощью специальной теории относительности при значениях коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$, находящихся в диапазонах $\boldsymbol{\beta > 1}$ и $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$.

Одним словом, при симметрии пространства и времени для инерциальных систем отсчета специальная теория относительности (при коэффициенте перехода $\boldsymbol{\beta \neq 1}$) не применима.

Как показано при рассмотрении примера № 3, законы сохранения импульса, механической энергии (при неизменности потенциальной энергии системы) и момента импульса замкнутой механической системы, а, следовательно, и условие симметрии пространства и времени выполняются только при коэффициенте перехода $\boldsymbol{\beta = 1}$ (когда $\mathbf{v}_{\mathbf{x}\text{кр}\mathbf{1}} = \pm\infty$ или $\mathbf{v}_{\mathbf{x}\text{кр}\mathbf{2}} = \pm\infty$), т.е. когда коэффициент перехода $\boldsymbol{\beta}$ не является функцией скорости $\mathbf{V}$ движения инерциальной системы отсчета.

А это позволяет сделать вывод, что при симметрии пространства и времени соотношения между координатами и временем одного и того же события в двух инерциальных системах отсчета - неподвижной $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижной $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, изображенных на рис. 1, исходя из формул (34)÷(38) и (255), должны иметь следующий вид:

$$\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2 + (\mathrm{V} \cdot t) \qquad (275)$$

$$\mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_1 - (\mathrm{V} \cdot t) \qquad (276)$$

$$\mathrm{y}_1 = \mathrm{y}_2 \qquad (36)$$

$$\mathrm{z}_1 = \mathrm{z}_2 \qquad (37)$$

$$t_1 = t_2 = t \qquad (277)$$

т.е., преобразования Галилея (система уравнений (35), (36) и (275)÷(277)) верны для любых значений скорости **V** движения инерциальной системы отсчета.

3.3. Пример № 4, подтверждающий выводы, сделанные при рассмотрении примера № 3

Попробуем рассмотреть следующий пример, позволяющий также прийти к выводам, полученным при рассмотрении примера № 3.

В примере № 4 в отличие от примера № 3 будут рассматриваться не криволинейные, а прямолинейные движения тел, составляющих замкнутую механическую систему.

Допустим, что имеются две инерциальные системы отсчета, аналогичные системам отсчета, изображенным на рис.1, неподвижная $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижная $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, которая движется со скоростью **V** параллельно оси $\mathbf{O_1x_1}$ относительно системы $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$.

Предположим, что имеется замкнутая механическая система тел, показанная на рис. 10 и состоящая из тела 1 и тела 2, имеющих равные массы $\mathbf{M_o}$ в состоянии покоя, и пружины 3.

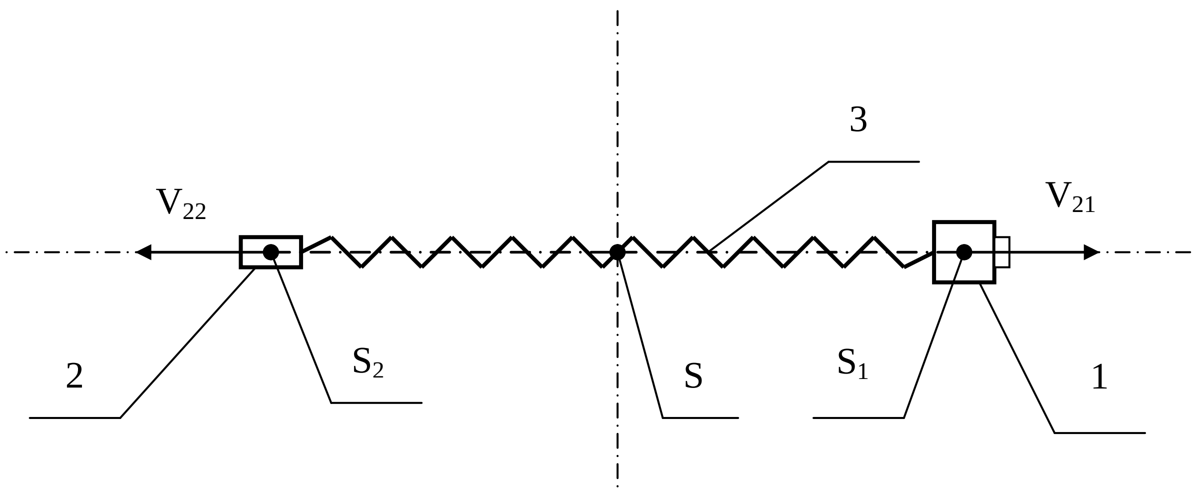

Рис. 10

Тела 1 и 2 соединены с абсолютно упругой пружиной 3, не имеющей массы (масса которой ничтожно мала по сравнению с массами тел 1 и 2).

Под действием пружины 3 тела 1 и 2 совершают симметричные возвратно-поступательные движения относительно общего центра масс системы тел 1 и 2 - точки **S**.

Центр масс тела 1 - точка $\mathbf{S_1}$ и центр масс тела 2 - точка $\mathbf{S_2}$ постоянно находятся на одной прямой линии, проходящей через точки **S**, $\mathbf{S_1}$ и $\mathbf{S_2}$.

Поместим рассматриваемую замкнутую механическую систему тел 1 и 2 с пружиной 3 в подвижную систему отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ таким образом, чтобы точка **S** была бы неподвижна в этой системе отсчета и совпадала с началом координат $\mathbf{O_2}$, а точки $\mathbf{S_1}$ и $\mathbf{S_2}$ находились бы на оси $\mathbf{O_2x_2}$, как показано на рис. 11÷13.

В подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ тела 1 и 2 совершают симметричные периодически повторяющиеся через время $\mathbf{T_2}$ (период колебания системы тел 1 и 2) движения.

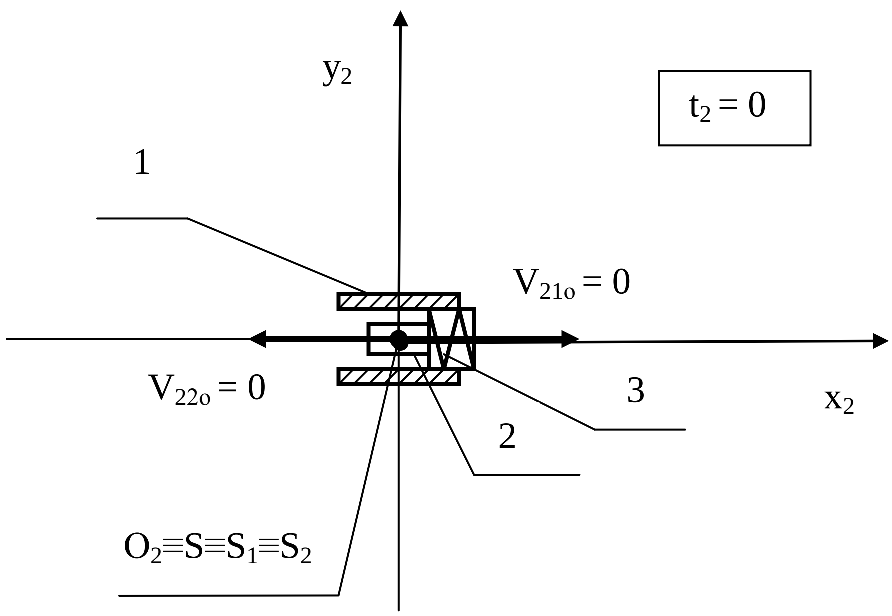

Рис. 11

Предположим, как показано на рис. 11, что в момент начала отсчета времени ($\boldsymbol{t_2}$=0) в системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ пружина 3 полностью сжата (пружина 3 имеет максимальное значение потенциальной энергии сжатия), тела 1 и 2 находятся в состоянии покоя, причем точка $\mathbf{S_1}$ совпадает с точкой $\mathbf{S_2}$, точкой **S** и началом координат $\mathbf{O_2}$ (допустим, что добились этого конструктивно).

После момента времени $\boldsymbol{t_2}$=0 пружина 3 начинает расжиматься и расталкивать тела 1 и 2 в разные стороны, т.е. потенциальная энергия сжатия пружины 3 начинает переходить в кинетические энергии тел 1 и 2 (скорость $\mathbf{V_{21}}$ и $\mathbf{V_{22}}$ движения тел 1 и 2 соответственно будет постепенно возрастать).

В системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ в какой-то момент времени $\boldsymbol{t_2}$ равный $\boldsymbol{t_{2мо}}$ пружина 3 будет полностью расжата (потенциальная энергия пружины 3 будет равна нулю), тела 1 и 2 будут иметь максимальные величины $\mathbf{V_{21м}}$ и $\mathbf{V_{22м}}$ скорости своего движения и максимальные значения кинетических энергий (как показано на рис. 12).

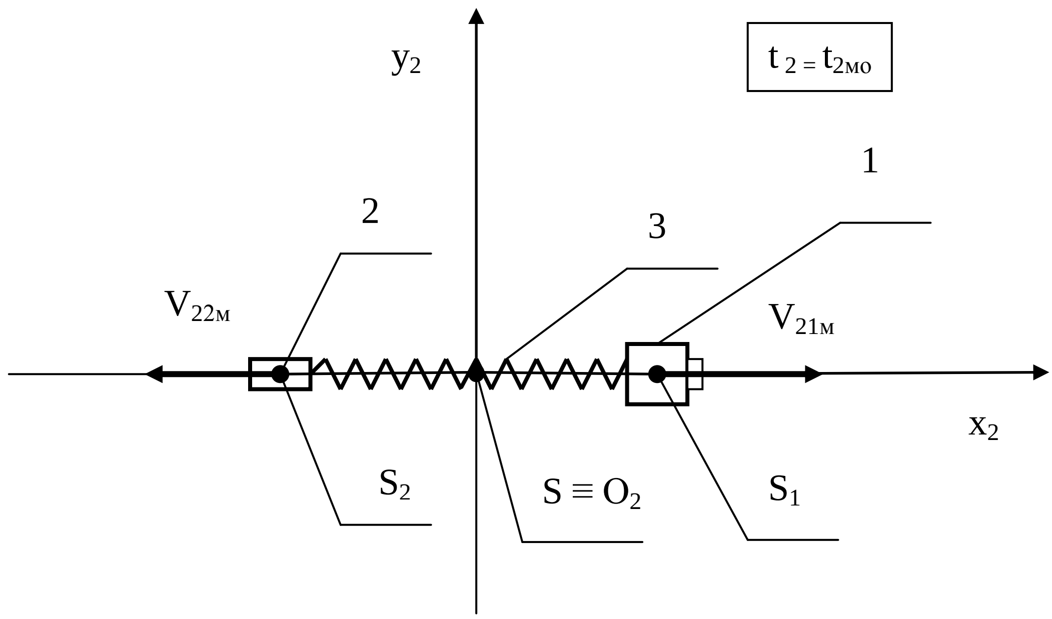

Рис. 12

После момента времени $\boldsymbol{t_{2мо}}$ пружина 3 начинает растягиваться, а тела 1 и 2 начинают замедляться, т.к. кинетические энергии тел 1 и 2 начинают переходить в потенциальную энергию растяжения пружины 3.

В системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ в какой-то момент времени $\boldsymbol{t_2}$ равный $\boldsymbol{t_{2то}}$

тела 1 и 2 остановятся (кинетические энергии тел 1 и 2 будут равны нулю), а пружина 3 полностью растянется (кинетическая энергия тел 1 и 2 перейдет полностью в потенциальную энергию растяжения пружины 3, которая в момент времени $\boldsymbol{t_{2то}}$ достигнет своего максимального значения), как показано на рис. 13.

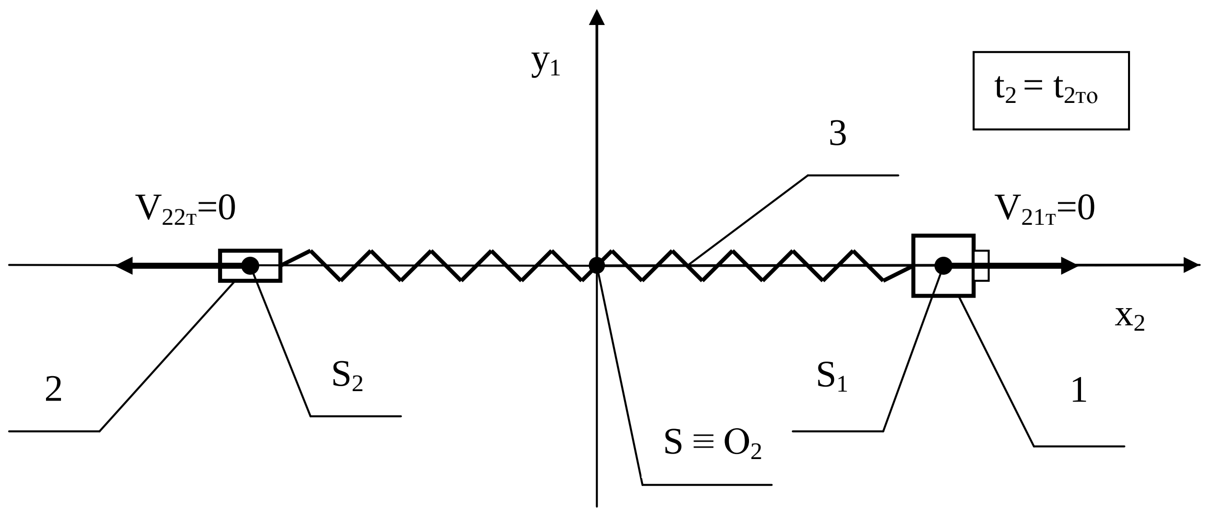

Рис. 13

Далее от момента времени $\boldsymbol{t_{2то}}$ до момента времени $\boldsymbol{t_2}$, равного периоду $\mathbf{T_2}$ колебания, процесс взаимодействия тел 1 и 2 с пружиной 3 будет происходить обратным образом (т.е. пружина 3 будет вначале сжиматься сама, передавая свою потенциальную энергию растяжения в кинетические энергии тел 1 и 2, а затем будет сжиматься под воздействием тел 1 и 2, которые будут передавать свои кинетические энергии в энергию сжатия пружины 3).

Учитывая периодичность движения тел 1 и 2 (и пружины 3), можно отметить, что:

- положение и состояние тел 1 и 2 и пружины 3, соответствующее моменту времени $\boldsymbol{t_2 = 0}$, будет иметь место и для моментов времени $\boldsymbol{t_{2р}}$, равных:

$$t_{2р} = T_2 \cdot \mathrm{n} \tag{278}$$

где: **n** = 0, 1, 2, 3, 4 …;

- положение и состояние тел 1 и 2 и пружины 3, соответствующее моменту времени $t_{2мо}$, будет иметь место и для моментов времени $t_{2м}$, равных:

$$t_{2м} = t_{2м0} + (T_2 \cdot n) \qquad (279)$$

- положение и состояние тел 1 и 2 и пружины 3, соответствующее моменту времени $t_{2то}$, будет иметь место и для моментов времени $t_{2т}$, равных:

$$t_{2т} = t_{2т0} + (T_2 \cdot n) \qquad (280)$$

Для упрощения дальнейшего рассмотрения предположим, что тела 1 и 2 являются точечными.

В подвижной системе отсчета $O_2x_2y_2z_2$, исходя из симметрии (в любой момент времени t_2 массы тел 1 и 2 одинаковы, центр **S** масс тел 1 и 2 совпадает с началом координат O_2), для любого момента времени t_2 связь между координатой x_{21} тела 1 и координатой x_{22} тела 2 запишется следующим образом:

$$x_{21} = -x_{22} \qquad (281)$$

а связь между скоростью V_{21} движения тела 1 и скоростью V_{22} движения тела 2 будет иметь вид:

$$V_{21} = -V_{22} \qquad (282)$$

Если рассматривать движение системы тел 1 и 2 и пружины 3 в неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$ и подвижной инерциальной системе отсчета $O_2x_2y_2z_2$, как показано на рис. 14, то опираясь на уравнения (34) и (35), можно написать связь между координатой x_{11} тела 1 в момент времени t_{11} в неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$ и координатой x_{21} тела 1 в момент времени t_{21} в подвижной системе отсчета $O_2x_2y_2z_2$:

$$x_{11} = \beta \cdot [x_{21} + (V \cdot t_{21})] \qquad (283)$$

$$x_{21} = \beta \cdot [x_{11} - (V \cdot t_{11})] \qquad (284)$$

Аналогично, используя уравнения (34) и (35), можно записать связь между координатой x_{12} тела 2 в момент времени t_{12} в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и координатой $\mathbf{x_{22}}$ тела 2 в момент времени $\boldsymbol{t_{22}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

$$x_{12} = \beta \cdot [x_{22} + (V \cdot t_{22})] \qquad (285)$$

$$x_{22} = \beta \cdot [x_{12} - (V \cdot t_{12})] \qquad (286)$$

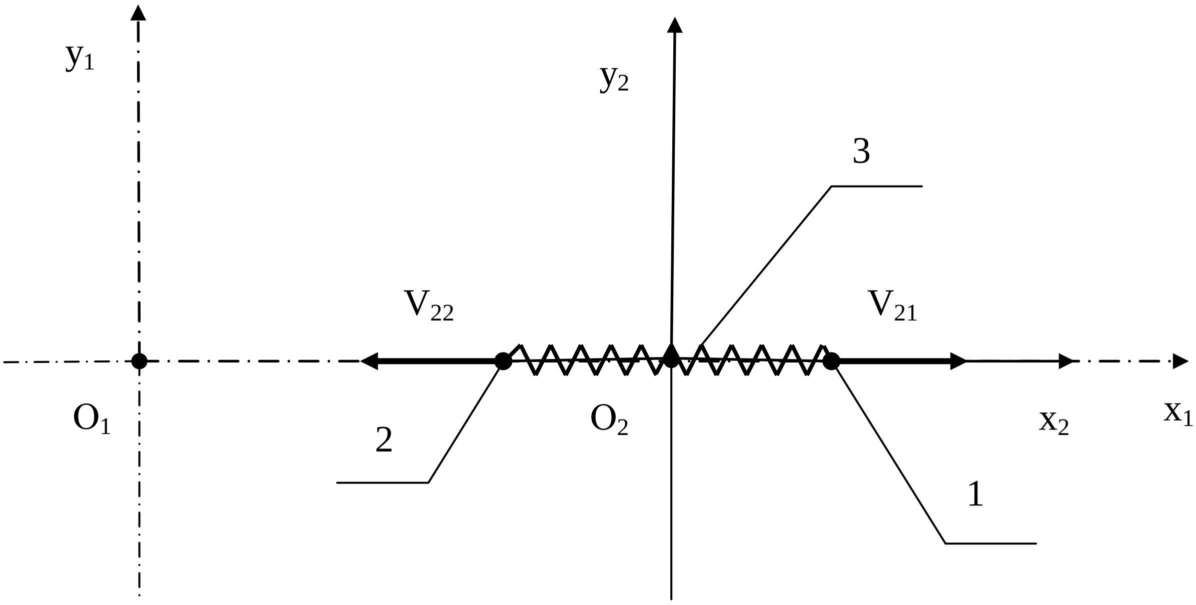

Рис. 14

С помощью формулы (38) можно написать связь между значениями времен $\boldsymbol{t_{11}}$, $\boldsymbol{t_{21}}$ и $\boldsymbol{t_{12}}$, $\boldsymbol{t_{22}}$:

$$t_{11} = \frac{(\beta^2 - 1) \cdot x_{21}}{\beta \cdot V} + (\beta \cdot t_{21}) \qquad (287)$$

$$t_{12} = \frac{(\beta^2 - 1) \cdot x_{22}}{\beta \cdot V} + (\beta \cdot t_{22}) \qquad (288)$$

В рассматриваемом примере нас будет интересовать положение тел 1 и 2 в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ в один и тот же момент времени, т.е. когда:

$$t_{11} = t_{12} \qquad (289)$$

Тогда уравнение (289) с учетом формул (287) и (288) примет вид:

$$\frac{(\beta^2 - 1) \cdot (x_{21} - x_{22})}{\beta^2 \cdot V} = (t_{22} - t_{21}) \qquad (290)$$

В подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ при выполнении условия (289) представляет интерес положение тел 1 и 2, когда:

$$t_{21} = t_{22} = t_{2p} \quad (291)$$

Подставив условие (291) в уравнение (290), получим:

$$x_{21} = x_{22} = 0 \quad (292)$$

Т.е. для выполнения условий (289) и (291) тела 1 и 2 (их центры масс) в рассматриваемый момент времени должны находиться в точке, совпадающей с центром масс **S** тел 1 и 2 и началом координат $\mathbf{O_2}$.

Отсюда:

$$t_{2p} = T_2 \cdot n \quad (278)$$

где: **n** = 0, 1, 2, 3, 4 …

Учитывая, что $\mathbf{x_{21} \geq 0}$ и $\mathbf{x_{22} \leq 0}$ (исходное условие), для случая, когда $\boldsymbol{t_{21}} \neq \boldsymbol{t_{2p}}$ и $\boldsymbol{t_{22}} \neq \boldsymbol{t_{2p}}$, из формулы (290) видно, что величина времени $\mathbf{t_{22}}$ в зависимости от значения коэффициента перехода **β** может быть:

- $\boldsymbol{t_{22}} > \boldsymbol{t_{21}}$ при **β > 1** ; (293)
- $\boldsymbol{t_{22}} < \boldsymbol{t_{21}}$ при **0 < β < 1** ; (294)
- $\boldsymbol{t_{22}} = \boldsymbol{t_{21}}$ при **β = 1** . (295)

Теперь можем приступить к проверке выполнения закона сохранения импульса.

Рассмотрим два момента времени в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$.

3.3.1.1. Момент времени $\mathbf{t_{1p}}$

Как показано на рис. 15, в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ в момент времени $\boldsymbol{t_2}$, равный $\boldsymbol{t_{2p}}$, тела 1 и 2 находятся в одной точке, совпадающей с центром координат $\mathbf{O_2}$ (исходное условие), и их скорости $\mathbf{V_{21p}}$ и $\mathbf{V_{22p}}$ движения соответственно равны:

$$V_{21p} = 0 \quad (296)$$

$$V_{22p} = 0 \quad (297)$$

Исходя из того, что в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ в момент времени $\boldsymbol{t_{2p}}$ тела 1 и 2 находятся в одной точке (т.е. координаты $\mathbf{x_{21p}}$ и $\mathbf{x_{22p}}$ тел 1 и 2 равны), в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ тела 1 и 2 в момент времени $\boldsymbol{t_{1p}}$, соответствующий моменту времени $\mathbf{t_{2p}}$ в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$, также будут находиться в одной точке (т.е. координаты $\mathbf{x_{11p}}$ и $\mathbf{x_{12p}}$ тел 1 и 2 равны).

Таким образом, в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ в момент времени $\boldsymbol{t_{1p}}$ тела 1 и 2 находятся в одной точке и их скорости $\mathbf{V_{11p}}$ и $\mathbf{V_{12p}}$ движения соответственно с учетом формулы (40) и равенств (296) и (297) равны:

$$V_{11p} = V \tag{298}$$

$$V_{12p} = V \tag{299}$$

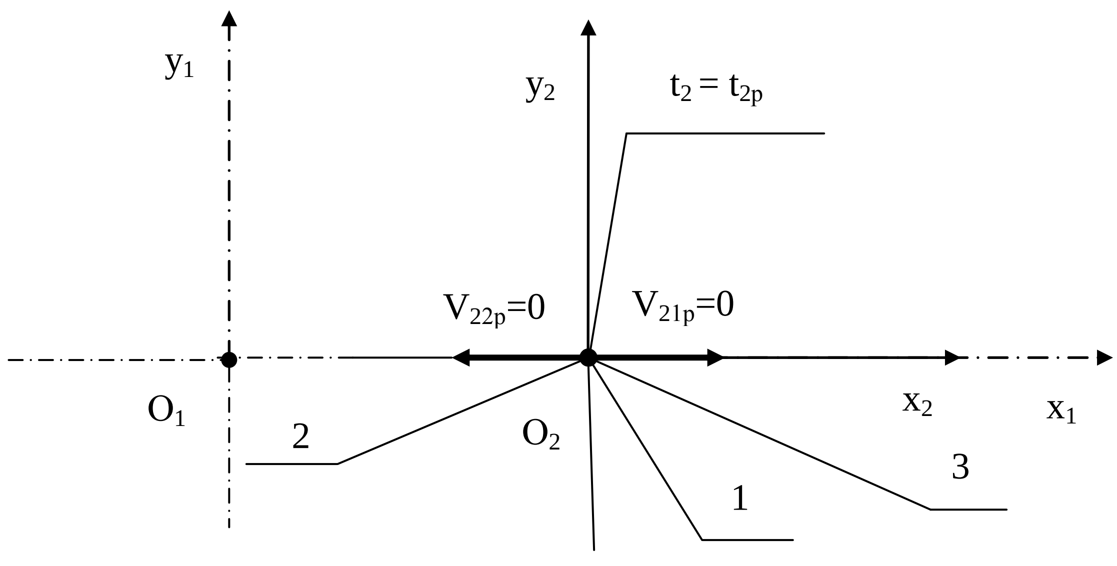

Рис. 15

Следовательно, в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ импульс $\mathbf{P_{1p}}$ замкнутой механической системы тел 1 и 2 (и пружины 3) в момент времени $\boldsymbol{t_{1p}}$ с учетом формулы (147) и равенств (298) и (299) равен:

$$P_{11p} + P_{12p} = P_{1p} = \frac{2 \cdot M_0 \cdot V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{xкp}^2}}} \tag{300}$$

3.3.1.2. Момент времени $t_{1т}$

Как уже рассматривалось ранее, в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ в момент времени t_2 равный $t_{2т}$, который для тела 1 запишем, как $t_{21т}$, тело 1 имеет скорость $\mathbf{V_{21т}}$ движения равную нулю:

$$V_{21т} = 0 \qquad (301)$$

т.к. пружина 3 в момент времени t_2 равный $t_{21т}$ имеет максимальную потенциальную энергию растяжения.

Положению тела 1 в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ в момент времени $t_{21т}$ будет соответствовать положение тела 1 в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ в момент времени $t_{1т}$.

В неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ в момент времени $t_{1т}$ тело 1, согласно уравнению (40), будет иметь скорость $\mathbf{V_{11т}}$ своего движения равную:

$$V_{11т} = V \qquad (302)$$

В неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ в момент времени t_1 равный $t_{1т}$ тело 2 будет иметь скорость движения равную $\mathbf{V_{12т}}$.

Положению тела 2 в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ в момент времени $t_{1т}$ будет соответствовать положение тела 2 в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ в момент времени t_2, равный $t_{22т}$.

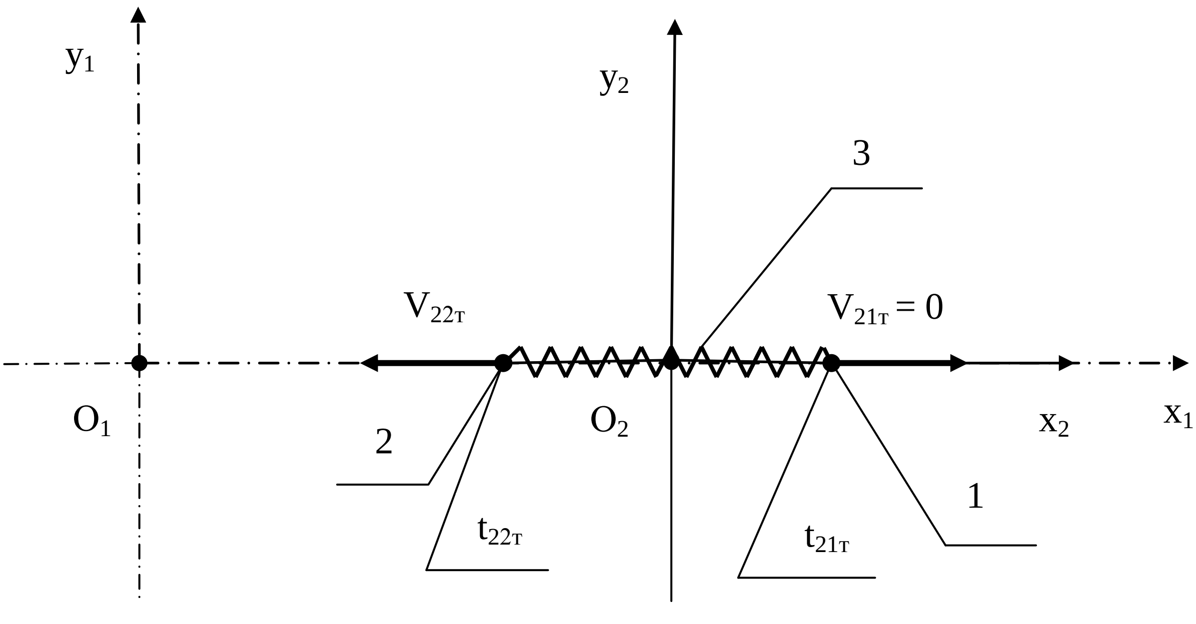

Рис. 16

Как показано на рис. 16, предположим, что в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ в момент времени $\boldsymbol{t_2}$ равный $\boldsymbol{t_{22т}}$ тело 2 имеет скорость движения равную $\mathbf{V_{22т}}$.

Учитывая условие (293), что при коэффициенте перехода $\boldsymbol{\beta > 1}$ время $\boldsymbol{t_{22}} > \boldsymbol{t_{21}}$, можно отметить, что при коэффициенте перехода $\boldsymbol{\beta > 1}$ скорость $\mathbf{V_{22т}}$ тела 2 будет направлена по направлению оси $\mathbf{O_2x_2}$.

Кроме этого, исходя из условия (294), утверждающего, что при коэффициенте перехода $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$ время $\boldsymbol{t_{22}} < \boldsymbol{t_{21}}$, можно отметить, что при коэффициенте перехода $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$ скорость $\mathbf{V_{22т}}$ тела 2 будет иметь направление, противоположное направлению оси $\mathbf{O_2x_2}$.

Используя формулу (40), можно записать связь между скоростями $\mathbf{V_{12т}}$ и $\mathbf{V_{22т}}$ тела 2:

$$V_{12т} = \frac{V_{22т} + V}{\frac{(\beta^2 - 1) \cdot V_{22т}}{\beta^2 \cdot V} + 1} \qquad (303)$$

Следовательно, в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ импульс $\mathbf{P_{1т}}$ замкнутой механической системы тел 1 и 2 (и пружины 3) в момент времени $\mathbf{t_{1т}}$ с учетом формулы (147) и равенства (302) равен:

$$P_{11т} + P_{12т} = P_{1т} = \frac{M_0 \cdot V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{хкр}^2}}} + \frac{M_0 \cdot V_{12т}}{\sqrt{1 - \frac{V_{12т}^2}{V_{хкр}^2}}} \qquad (304)$$

3.3.1.3. Определение условий выполнения закона сохранения импульса для примера № 4

В связи с тем, что механическая система тел 1 и 2 (и пружины 3) является замкнутой, закон сохранения импульса позволяет записать для моментов времени $\boldsymbol{t_{1р}}$ и $\boldsymbol{t_{1т}}$ в неподвижной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ следующее уравнение:

$$P_{1т} = P_{1р}$$

Или, исходя из формул (300) и (304):

$$\frac{M_0 \cdot V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{V_{хкр}^2}}} + \frac{M_0 \cdot V_{12т}}{\sqrt{1-\frac{V_{12т}^2}{V_{хкр}^2}}} = \frac{2 \cdot M_0 \cdot V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{V_{хкр}^2}}} \qquad (305)$$

Из уравнения (305) следует, что необходимым условием (значением скорости $\mathbf{V_{12т}}$), при котором в примере № 4 будет выполняться закон сохранения импульса в неподвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$, является:

$$V_{12т} = V \qquad (306)$$

или с учетом формулы (303):

$$V_{22т} = 0 \qquad (307)$$

Из равенств (306) и (307) следует, что величины скоростей $\mathbf{V_{12т}}$ и $\mathbf{V_{22т}}$ не зависят от величины скорости $\mathbf{V}$ (и, следовательно, не зависят от величины коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$).

Но в подвижной системе отсчета $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$ при значениях координат $\mathbf{x_{21т}}$ тела 1 и $\mathbf{x_{22т}}$ тела 2, не равных нулю, равенство нулю скорости $\mathbf{V_{22т}}$ тела 2 возможно только, когда:

$$t_{22т} = t_{21т} \qquad (308)$$

Вставив равенство (308) в формулу (290), получим:

$$\frac{(\beta^2 - 1) \cdot (x_{21} - x_{22})}{\beta^2 \cdot V} = 0 \qquad (309)$$

Но т.к. величина $\mathbf{(x_{21} - x_{22}) > 0}$, то из уравнения (309) будем иметь еще одно условие выполнения закона сохранения импульса в неподвижной инерциальной системе отсчета $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ для примера № 4:

$$\beta = 1 \qquad (259)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что в замкнутой механической системе тел, рассматриваемой в примере № 4, для значений коэффициента перехода, находящихся в диапазонах $\boldsymbol{\beta > 1}$ и $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$, закон сохранения импульса не выполняется.

IV. Заключение

В заключение можно обобщить вышенаписанное.

Кинематика

Использование принципа относительности и симметрии пространства и времени позволило:

1. Перейти от системы уравнений связи инерциальных систем отсчета - неподвижной $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ и подвижной $\mathbf{O_2x_2y_2z_2}$:

$$x_1 = \beta_1 \cdot [x_2 + (V_1 \cdot t_2)] \quad (24)$$

$$x_2 = \beta_2 \cdot [x_1 + (V_2 \cdot t_1)] \quad (25)$$

$$y_1 = \beta_3 \cdot y_2 \quad (26)$$

$$y_2 = \beta_4 \cdot y_1 \quad (27)$$

$$z_1 = \beta_5 \cdot z_2 \quad (28)$$

$$z_2 = \beta_6 \cdot z_1 \quad (29)$$

к системе уравнений:

$$x_1 = \beta \cdot [x_2 + (V \cdot t_2)] \quad (34)$$

$$x_2 = \beta \cdot [x_1 - (V \cdot t_1)] \quad (35)$$

$$y_1 = y_2 \quad (36)$$

$$z_1 = z_2 \quad (37)$$

2. Установить, что значения коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ для инерциальных систем отсчета могут находиться в двух взаимоисключающих диапазонах:

- $\boldsymbol{\beta > 1}$,
- $\mathbf{0 < \boldsymbol{\beta} < 1}$

3. Получить формулу для коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ для инерциальных систем отсчета для случая $\boldsymbol{\beta > 1}$:

$$\beta_{>}^2 = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{v_{xкр1}^2}} \quad (59)$$

где: $\mathbf{v_{xкр1}}$ - постоянная действительная величина;

4. Получить формулу для коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$ для инерциальных

систем отсчета для случая **0 < β < 1**:

$$\beta^2_{<} \ = \frac{1}{1+\frac{V^2}{v^2_{хкр2}}} \qquad (60)$$

где: $\mathbf{v_{хкр2}}$ - постоянная действительная величина;

5. Установить, что при коэффициенте перехода **β > 1** существует такое действительное значение скорости $\mathbf{V_{хкр}}$ (равное $\mathbf{v_{хкр1}}$) движения точки, которая будет инвариантна во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета:

$$v_{хкр1} \ = \ Const \qquad (71)$$

6. Установить, что при коэффициенте перехода **0 < β < 1** имеет место только мнимое значение скорости $\mathbf{V_{хкр}}$ (равное $(\mathbf{í \cdot v_{хкр2}})$) движения точки, которая будет инвариантна во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета:

$$v_{хкр2} \ = \ Const \qquad (72)$$

<u>Динамика</u>

1. Используя обязательность выполнения в инерциальных системах отсчета закона сохранения импульса и закона сохранения механической энергии (а точнее, его частного случая при постоянстве потенциальной энергии - постоянства кинетической энергии) для замкнутой механической системы тел, двигающихся прямолинейно и испытывающих только абсолютно упругие взаимодействия, были получены зависимости массы, импульса и кинетической энергии тела от скорости его движения:

- при **β > 1** :

$$M(V)_{>} \ = \frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{v^2_{хкр1}}}} \qquad (150)$$

$$P(V)_{>} = \frac{M_0 \cdot V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{xкр1}^2}}} \qquad (151)$$

$$E_к(V)_{>} = M_0 \cdot v_{xкр1}^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{xкр1}^2}}} - 1 \right) \qquad (152)$$

- при $\mathbf{0 < \beta < 1}$:

$$M(V)_{<} = \frac{M_0}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{xкр2}^2}}} \qquad (171)$$

$$P(V)_{<} = \frac{M_0 \cdot V}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{xкр2}^2}}} \qquad (172)$$

$$E_к(V)_{<} = M_0 \cdot v_{xкр2}^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{xкр2}^2}}} \right) \qquad (173)$$

2. На отдельном примере (пример № 3), в котором рассматривалась замкнутая механическая система тел, движущихся нелинейно, было показано, что при значениях коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$, находящихся в диапазонах $\mathbf{\beta > 1}$ и $\mathbf{0 < \beta < 1}$, имеет место нарушение законов сохранения импульса, момента импульса и механической энергии (при неизменности потенциальной энергии системы), т.е., импульс, момент импульса и кинетическая энергия замкнутой механической системы оказались переменными во времени величинами.

Связь между законами сохранения импульса, механической энергии и момента импульса замкнутой механической системы и симметрией пространства и времени (однородностью и изотропностью пространства и однородностью времени) позволила отметить, что при значениях коэффициента перехода $\boldsymbol{\beta}$, находящихся в диапазонах $\boldsymbol{\beta > 1}$ и $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$, нарушается условие симметрии пространства и времени.

При рассмотрении примера № 3 было показано, что законы сохранения импульса, механической энергии и момента импульса замкнутой механической системы, а, следовательно, и условие симметрии пространства и времени выполняются только при коэффициенте перехода $\boldsymbol{\beta = 1}$.

А учитывая, что условие симметрии пространства и времени является требованием (исходным условием) специальной теории относительности к пространству и времени, то вступление выводов специальной теории относительности в противоречие с условием симметрии пространства и времени, заложенным при ее создании, позволяет предположить следующее:

- связь между координатами и временем в инерциальных системах отсчета не может быть записана с помощью специальной теории относительности, если значения коэффициента перехода β будут находиться в диапазонах β > 1 или 0 < β < 1;

- в однонаправленных инерциальных системах отсчета коэффициент перехода β не может быть больше или меньше 1, а может быть только равен 1;

- в инерциальных системах отсчета коэффициент перехода β не зависит от величины скорости V движения инерциальных систем отсчета;

- преобразования Галилея верны для инерциальных систем отсчета при любых значениях скорости V их движения:

$$\mathbf{x_1 = x_2 + (V \cdot \boldsymbol{t})} \quad (\mathbf{275})$$

$$\mathbf{x_2 = x_1 - (V \cdot \boldsymbol{t})} \quad (\mathbf{276})$$

$$\mathbf{y_1 = y_2} \quad (\mathbf{36})$$

$$\mathbf{z_1 = z_2} \quad (\mathbf{37})$$

$$t_1 = t_2 = t \qquad (277)$$

Здесь также следует отметить, что выводы, сделанные в главе «Динамика», верны лишь при выполнении принятого предположения о том, что величина потенциальной энергии тела не зависит от величины скорости его перемещения (т.е. от величины его кинетической энергии).

P.S.: Основные идеи изложены в статье "Специальная теория относительности без постулата о постоянстве скорости света", напечатанной в журнале "Актуальные проблемы современной науки" (ISSN 1680-2721) № 1 (34) за 2007 год и размещенной на сайтах "Новые идеи и гипотезы" http://new-idea.kulichki.net/?mode=physics и "Математическая физика. Теория относительности" http://www.matphysics.ru/ .

Автор В.Н. Кочетков