

Рубрика: математическая физика.

Тематика: специальная теория относительности.

Кочетков Виктор Николаевич  
главный специалист ФГУП «Центр эксплуатации  
объектов наземной космической инфраструктуры»  
(ФГУП «ЦЭНКИ»)

**КОММЕНТАРИИ ПО ВОПРОСУ ПРИМЕНИМОСТИ  
СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ  
ИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОТСЧЕТА ПРИ УСЛОВИИ  
СИММЕТРИИ ПРОСТРАНСТВА И ВРЕМЕНИ**

(исправленная и дополненная)

В данной статье делается попытка установить, являются ли в специальной теории относительности преобразования Лоренца единственно возможной связью между координатами и временем в инерциальных системах отсчета, а также соответствуют ли выводы специальной теории относительности требованиям, накладываемым условием симметрии пространства и времени.

**1. Введение**

В настоящее время в журналах и Интернете публикуется большое количество статей, посвященных критике специальной теории относительности.

Причем критические замечания в отношении специальной теории относительности в основном состоят из описания логического несоответствия ее выводов реальному представлению пространства и времени.

Но ведь специальная теория относительности – это идеализированная

математическая модель, построенная в рамках определенных условий, и поэтому результаты ее не могут быть в обязательном порядке распространены вне рамок, установленных для нее условий.

По-моему, если уж и критиковать специальную теорию относительности, то критику надо было бы начать с ее математической модели.

Может, было бы полезно еще раз рассмотреть математическую модель специальной теории относительности, а выводы ее проверить на выполнение условий, закладываемых при ее создании.

### **1.1. Краткая история создания специальной теории относительности**

На рубеже XIX-XX веков стараниями крупнейших физиков мира была создана специальная теория относительности.

В конце XIX столетия между двумя важнейшими разделами физики - механикой и электродинамикой - возникли серьезные противоречия.

В механике утвердился принцип относительности Галилея - полное равноправие систем отсчета, движущихся относительно друг друга прямолинейно и равномерно.

В электродинамике основополагающее место заняла идея эфира - среды, заполняющей мировое пространство, и в которой происходят все физические процессы, в т.ч. электромагнитные колебания. При этом движение частиц и поля следовало описывать в координатах, жестко связанных с эфиром - абсолютной системой отсчета.

В 1881, 1886÷1887 годах А. Майкельсону и Э. Моли в ходе экспериментов не удалось зарегистрировать "эфирный ветер". В результате эфирная теория света, казалось бы надежно подтвержденная опытами, не согласовывалась с классической механикой.

В 1889 году ирландский физик Д. Фицджеральд предложил принять, что при движении тела со скоростью  $V$  относительно эфира его продольный

размер  $l'$  испытывает сокращение по закону:

$$l' = l \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (1)$$

где:  $c$  - скорость света,

$l$  - длина неподвижного в отношении эфира тела.

В 1892 году нидерландский физик Х. Лоренц дополнил гипотезу Д. Фицджеральда идеей "местного" времени  $t'$ , связанного с "истинным" универсальным временем  $t$  преобразованием:

$$t' = t - \left( \frac{x \cdot v}{c^2} \right) \quad (2)$$

где:  $v$  - скорость движения тела при прохождении точки пространства с координатой  $x$ .

Также Х. Лоренц видоизменил преобразования Галилея на случай больших скоростей:

$$x_1 = \beta \cdot [x_2 + (V \cdot t_2)] \quad (3)$$

$$y_1 = y_2 \quad (4)$$

$$z_1 = z_2 \quad (5)$$

$$t_1 = \beta \cdot \left[ t_2 + \left( \frac{x_2 \cdot V}{c^2} \right) \right] \quad (6)$$

путем введения "релятивистского" множителя  $\beta$  :

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (7)$$

Формулы (3)-(6) перехода между инерциальными системами отсчета получили наименование "преобразования Лоренца".

Еще в 1881 году английский физик Д. Томсон предположил, что масса  $M$  тела, движущегося со скоростью  $v$ , будет больше, чем масса  $M_0$  в состоянии покоя, причем величина  $M$  равна:

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (8)$$

## 1.2. Специальная теория относительности

В 1905 году А. Эйнштейн взял за основу фундаментальные принципы, в сжатом виде передающие суть двух классических физических теорий: из механики - принцип равноправия всех инерциальных систем отсчета (принцип относительности), из электродинамики - принцип постоянства скорости света.

Принцип относительности: **в любых инерциальных системах отсчета все физические явления при одних и тех же условиях протекают одинаково**, т.е. физические законы независимы (инвариантны) по отношению к выбору инерциальной системы отсчета - уравнения, выражающие эти законы, имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета.

Принцип инвариантности скорости света: **скорость света в вакууме не зависит от движения источника света**, т.е. скорость света одинакова во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета.

Используя принцип относительности и принцип постоянства скорости света, А. Эйнштейн вывел преобразования Лоренца, однако придал им иной физический смысл:

$$x_1 = \frac{x_2 + (V \cdot t_2)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (9)$$

$$x_2 = \frac{x_1 - (V \cdot t_1)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (10)$$

$$y_1 = y_2 \quad (11)$$

$$z_1 = z_2 \quad (12)$$

где:  $x_1, y_1, z_1$  – координаты точки **A** в момент времени  $t_1$  в неподвижной инерциальной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$ ;

$x_2, y_2, z_2$  – координаты точки **A** в момент времени  $t_2$  в подвижной инерциальной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  (как показано на рис. 1).

$$t_1 = \frac{t_2 + \left(\frac{x_2 \cdot V}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (13)$$

$$t_2 = \frac{t_1 - \left(\frac{x_1 \cdot V}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (14)$$

Исходя из формул (9)÷(14), связь между проекциями  $v_{x2}$ ,  $v_{y2}$  и  $v_{z2}$  скорости движения точки **A** в подвижной системе отсчета  $\mathbf{O}_2x_2y_2z_2$  на оси декартовых координат и аналогичными проекциями  $v_{x1}$ ,  $v_{y1}$  и  $v_{z1}$  скорости той же точки **A** в неподвижной системе отсчета  $\mathbf{O}_1x_1y_1z_1$  определена в виде:

$$v_{x1} = \frac{v_{x2} + V}{1 + \frac{V \cdot v_{x2}}{c^2}} \quad (15)$$

$$v_{x2} = \frac{v_{x1} - V}{1 - \frac{V \cdot v_{x1}}{c^2}} \quad (16)$$

$$v_{y1} = \frac{v_{y2} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V \cdot v_{x2}}{c^2}} \quad (17)$$

$$v_{y2} = \frac{v_{y1} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V \cdot v_{x1}}{c^2}} \quad (18)$$

$$v_{z1} = \frac{v_{z2} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V \cdot v_{x2}}{c^2}} \quad (19)$$

$$v_{z2} = \frac{v_{z1} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V \cdot v_{x1}}{c^2}} \quad (20)$$

В специальной теории относительности зависимости массы  $\mathbf{M}(\mathbf{V})$ , импульса  $\mathbf{P}(\mathbf{V})$  и кинетической энергии  $\mathbf{E}_k(\mathbf{V})$  материальной точки, движущейся со скоростью  $\mathbf{V}$ , выражаются формулами:

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (21)$$

$$P(V) = \frac{M_0 \cdot V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (22)$$

$$E_k(V) = M_0 \cdot c^2 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (23)$$

где:  $M_0$  - масса этой материальной точки в состоянии покоя.

В заключение можно отметить, что специальная теория относительности была создана в первую очередь для объяснения результатов экспериментов (А. Майкельсона и др.), приведших к рассмотрению вопроса о постоянстве скорости света (а точнее к объяснению постоянства скорости света).

## 2. Кинематика

### 2.1. "Специальная теория относительности в общем виде"

Чтобы не путаться в наименованиях, предполагаемую ниже идею назовем "специальная теория относительности в общем виде".

Предположим, что пространство однородно и изотропно, а время однородно (т.е. имеется симметрия пространства и времени).

При рассмотрении будем использовать принцип относительности: **в любых инерциальных системах отсчета все физические явления при одних и тех же условиях протекают одинаково.**

В связи с отсутствием необходимости не будем применять принцип инвариантности скорости света (т.е. применим менее жесткие условия).

Предположим, что имеются две инерциальные системы отсчета: неподвижная  $O_1x_1y_1z_1$  и подвижная  $O_2x_2y_2z_2$ , изображенные на рис. 1 и у которых:

- сходные оси декартовых координат систем  $O_1x_1y_1z_1$  и  $O_2x_2y_2z_2$  попарно параллельны и одинаково направлены;

- система  $O_2x_2y_2z_2$  движется относительно системы  $O_1x_1y_1z_1$  с постоянной скоростью  $V_2$  относительно оси  $Ox_1$ ;

- в качестве начала отсчета времени ( $t_1=0$  и  $t_2=0$ ) в обеих системах выбран тот момент, когда начала координат  $O_1$  и  $O_2$  этих систем совпадают.

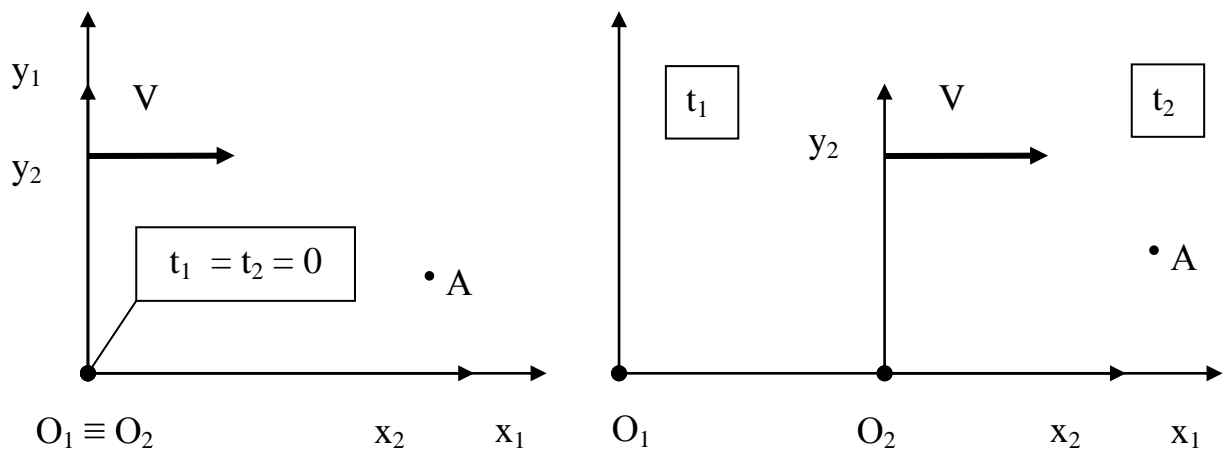


Рис. 1

Исходя из симметрии пространства и времени (однородности и изотропности пространства и однородности времени), соотношения между координатами и временем одного и того же события в двух инерциальных системах отсчета неподвижной  $O_1x_1y_1z_1$  и подвижной  $O_2x_2y_2z_2$  могут быть записаны следующим образом:

$$x_1 = \beta_1 \cdot [x_2 + (V_1 \cdot t_2)] \quad (24)$$

$$x_2 = \beta_2 \cdot [x_1 + (V_2 \cdot t_1)] \quad (25)$$

$$y_1 = \beta_3 \cdot y_2 \quad (26)$$

$$y_2 = \beta_4 \cdot y_1 \quad (27)$$

$$z_1 = \beta_5 \cdot z_2 \quad (28)$$

$$z_2 = \beta_6 \cdot z_1 \quad (29)$$

где:  $x_1, y_1, z_1$  и  $x_2, y_2, z_2$  – координаты точки  $A$  в системах отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  и  $O_2x_2y_2z_2$ , соответственно;

$t_1$  и  $t_2$  – значения времени в системах отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  и  $O_2x_2y_2z_2$ , соответственно;

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$  и  $\beta_6$  – коэффициенты перехода;

$V_1$  – скорость движения системы  $O_1x_1y_1z_1$  относительно системы  $O_2x_2y_2z_2$ .

Использование принципа относительности и симметрии пространства и времени позволяет получить:

$$V_1 = -V_2 = V \quad (30)$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta \quad (31)$$

$$\beta_3 = \beta_4 = 1 \quad (32)$$

$$\beta_5 = \beta_6 = 1 \quad (33)$$

При этом система уравнений (24)÷(29) упростится и примет вид:

$$x_1 = \beta \cdot [x_2 + (V \cdot t_2)] \quad (34)$$

$$x_2 = \beta \cdot [x_1 - (V \cdot t_1)] \quad (35)$$

$$y_1 = y_2 \quad (36)$$

$$z_1 = z_2 \quad (37)$$

Причем коэффициент перехода  $\beta$  не зависит от значений координат  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  и времени  $t_1$  и  $t_2$ , а предположительно может являться функцией скорости  $V$  перемещения систем отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  и  $O_2x_2y_2z_2$  относительно друг друга.

Из формул (34) и (35) можно записать зависимость для значений времен  $t_1$  и  $t_2$ :

$$t_1 = \frac{(\beta^2 - 1) \cdot x_2}{\beta \cdot V} + (\beta \cdot t_2) \quad (38)$$

$$t_2 = \frac{(1 - \beta^2) \cdot x_1}{\beta \cdot V} + (\beta \cdot t_1) \quad (39)$$



Про коэффициент перехода  $\beta$  в формулах (34) и (35) можно сказать следующее:

- исходя из принципа относительности, симметрии пространства и времени коэффициент перехода  $\beta$  может быть только действительной величиной;

- коэффициент перехода  $\beta$  будет равен 1 при  $V = 0$  (граничное условие);

- коэффициент перехода  $\beta$  будет равен 1, если коэффициент перехода  $\beta$  не будет зависеть от величины скорости  $V$ ;

- при принятом направлении оси декартовых координат систем  $O_1x_1y_1z_1$  и  $O_2x_2y_2z_2$  коэффициент перехода  $\beta$  будет больше 0, так как отрицательные значения коэффициент перехода  $\beta$  будет иметь при разной направленности осей  $O_1x_1$  и  $O_2x_2$ ;

- при значении коэффициента перехода  $\beta > 1$  линейный размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, уменьшается в направлении движения и ход времени часов, движущихся относительно инерциальной системы отсчета, замедляется;

- при значении коэффициента перехода  $0 < \beta < 1$  линейный размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, увеличивается в направлении движения и ход времени часов, движущихся относительно инерциальной системы отсчета, ускоряется;

- принцип относительности и симметрия пространства и времени определяют также, что в случае зависимости коэффициента перехода  $\beta$  от величины скорости  $V$  величина коэффициента перехода  $\beta$  однозначно зависит от величины скорости  $V$  (т.е. одному конкретному значению скорости  $V$  может соответствовать только одно конкретное значение коэффициента перехода  $\beta$ ).

Формулы (24)÷(29) однозначно определяют связь между координатами  $x_1$ ,  $y_1$  и  $z_1$  точки  $A$  и временем  $t_1$  в неподвижной системе  $O_1x_1y_1z_1$  и координатами  $x_2$ ,  $y_2$  и  $z_2$  этой же точки  $A$  и временем  $t_2$  в подвижной

системе  $\mathbf{O}_2\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2\mathbf{z}_2$ .

Используя формулы (24)÷(39), можно получить однозначную связь между проекциями  $v_{x2}$ ,  $v_{y2}$  и  $v_{z2}$  скорости движения точки  $\mathbf{A}$  в подвижной системе  $\mathbf{O}_2\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2\mathbf{z}_2$  на оси декартовых координат и аналогичными проекциями  $v_{x1}$ ,  $v_{y1}$  и  $v_{z1}$  скорости этой точки  $\mathbf{A}$  в неподвижной системе  $\mathbf{O}_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1\mathbf{z}_1$ :

$$v_{x1} = \frac{v_{x2} + V}{\frac{(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}}{\beta^2 \cdot V} + 1} \quad (40)$$

$$v_{x2} = \frac{v_{x1} - V}{\frac{(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}}{\beta^2 \cdot V} + 1} \quad (41)$$

$$v_{y1} = \frac{v_{y2}}{\frac{(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}}{\beta \cdot V} + \beta} \quad (42)$$

$$v_{y2} = \frac{v_{y1}}{\frac{(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}}{\beta \cdot V} + \beta} \quad (43)$$

$$v_{z1} = \frac{v_{z2}}{\frac{(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}}{\beta \cdot V} + \beta} \quad (44)$$

$$v_{z2} = \frac{v_{z1}}{\frac{(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}}{\beta \cdot V} + \beta} \quad (45)$$

Из формул (38)÷(45) может быть получена однозначная связь между проекциями  $a_{x2}$ ,  $a_{y2}$  и  $a_{z2}$  ускорения точки  $\mathbf{A}$  в подвижной системе  $\mathbf{O}_2\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2\mathbf{z}_2$  на оси декартовых координат и аналогичными проекциями  $a_{x1}$ ,  $a_{y1}$  и  $a_{z1}$  ускорения этой точки  $\mathbf{A}$  в неподвижной системе  $\mathbf{O}_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1\mathbf{z}_1$ :

$$a_{x1} = \frac{a_{x2}}{\beta^3 \cdot \left[ \frac{(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}}{\beta^2 \cdot V} + 1 \right]^3} \quad (46)$$

$$a_{x2} = \frac{a_{x1}}{\beta^3 \cdot \left[ \frac{(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}}{\beta^2 \cdot V} + 1 \right]^3} \quad (47)$$

$$a_{y1} = \frac{\left\{ a_{y2} \cdot \left[ \frac{(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}}{\beta \cdot V} + \beta \right] \right\} - \frac{(\beta^2 - 1) \cdot a_{x2} \cdot v_{y2}}{\beta \cdot V}}{\left[ \frac{(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}}{\beta \cdot V} + \beta \right]^3} \quad (48)$$

$$a_{y2} = \frac{\left\{ a_{y1} \cdot \left[ \frac{(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}}{\beta \cdot V} + \beta \right] \right\} - \frac{(1 - \beta^2) \cdot a_{x1} \cdot v_{y1}}{\beta \cdot V}}{\left[ \frac{(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}}{\beta \cdot V} + \beta \right]^3} \quad (49)$$

$$a_{z1} = \frac{\left\{ a_{z2} \cdot \left[ \frac{(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}}{\beta \cdot V} + \beta \right] \right\} - \frac{(\beta^2 - 1) \cdot a_{x2} \cdot v_{z2}}{\beta \cdot V}}{\left[ \frac{(\beta^2 - 1) \cdot v_{x2}}{\beta \cdot V} + \beta \right]^3} \quad (50)$$

$$a_{z2} = \frac{\left\{ a_{z1} \cdot \left[ \frac{(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}}{\beta \cdot V} + \beta \right] \right\} - \frac{(1 - \beta^2) \cdot a_{x1} \cdot v_{z1}}{\beta \cdot V}}{\left[ \frac{(1 - \beta^2) \cdot v_{x1}}{\beta \cdot V} + \beta \right]^3} \quad (51)$$

## 2.2. Определение особой скорости

Допустим, что существует такое значение  $V_{\text{хкр}}$  проекции  $v_{x1}$  скорости движения точки **A** в неподвижной системе отсчета  $\mathbf{O}_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1\mathbf{z}_1$ , которому бы соответствовало значение проекции  $v_{x2}$  скорости движения точки **A** в подвижной системе отсчета  $\mathbf{O}_2\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2\mathbf{z}_2$ , равное  $V_{\text{хкр}}$ , т.е. когда:

$$v_{x1} = v_{x2} = V_{\text{хкр}} \quad (52)$$

Подставив значение (52) в формулу (40) или (41), получим:

$$V_{\text{хкр}}^2 = \frac{\beta^2 \cdot V^2}{\beta^2 - 1} \quad (53)$$

Из формулы (53) следует зависимость  $V_{\text{хкр}}$  от величины скорости  $V$  и коэффициента перехода  $\beta$  для любого возможного значения скорости  $V$ :

$$V_{\text{хкр}} = \pm \frac{\beta \cdot V}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \quad (54)$$

В случае, если коэффициент перехода  $\beta$  имеет значение  $\beta \geq 1$ ,

получим, что  $V_{\text{хкр}}$  будет иметь действительное значение и ее для дальнейшего рассмотрения запишем как:

$$V_{\text{хкр}} = v_{\text{хкр1}} = \pm \frac{\beta \cdot V}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \quad (55)$$

где:  $v_{\text{хкр1}}$  - действительная величина, имеющая размерность скорости.

А в случае, если коэффициент перехода  $\beta$  имеет значение  $0 < \beta \leq 1$ , получим, что  $V_{\text{хкр}}$  будет иметь мнимое значение (что говорит о том, что скорость движения точки в неподвижной системе отсчета никогда не может быть равна скорости этой же точки в подвижной инерциальной системе отсчета при  $0 < \beta \leq 1$ ) и которую для дальнейшего рассмотрения запишем как:

$$V_{\text{хкр}} = i \cdot v_{\text{хкр2}} = \pm \frac{i \cdot \beta \cdot V}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (56)$$

где:  $v_{\text{хкр2}}$  - действительная величина, имеющая размерность скорости,

а  $i$  равно:

$$i = \sqrt{-1} \quad (57)$$

Из формулы (53) можно получить зависимость коэффициента перехода  $\beta$  от величины скорости  $V$  для любого возможного значения скорости  $V$ :

$$\beta^2 = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{V_{\text{хкр}}^2}} \quad (58)$$

Тогда из формулы (58) с учетом формулы (55) для коэффициента перехода  $\beta$ , имеющего значения  $\beta \geq 1$  и который обозначим как  $\beta_{>}$ , можно записать:

$$\beta_{>}^2 = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{V_{\text{хкр1}}^2}} \quad (59)$$

А из формулы (58) с учетом формулы (56) для коэффициента перехода  $\beta$ , имеющего значения  $0 < \beta \leq 1$  и который обозначим как  $\beta_{<}$ , можно записать:

$$\beta_{<}^2 = \frac{1}{1 + \frac{V^2}{V_{\text{кр}2}^2}} \quad (60)$$

### 2.3. Уравнение связи для коэффициентов перехода

Рассмотрим три инерциальные системы отсчета: неподвижную  $O_1x_1y_1z_1$  и подвижные  $O_2x_2y_2z_2$  и  $O_3x_3y_3z_3$ , показанные на рис. 2 и у которых:

- сходные оси декартовых координат систем  $O_1x_1y_1z_1$ ,  $O_2x_2y_2z_2$  и  $O_3x_3y_3z_3$  попарно параллельны и одинаково направлены;

- система  $O_2x_2y_2z_2$  движется относительно системы  $O_1x_1y_1z_1$  с постоянной скоростью  $V_2$  относительно оси  $Ox_1$ ;

- система  $O_3x_3y_3z_3$  движется относительно системы  $O_1x_1y_1z_1$  с постоянной скоростью  $V_3$  относительно оси  $Ox_1$ ;

- в качестве начала отсчета времени ( $t_1=0$ ,  $t_2=0$  и  $t_3=0$ ) в этих трех системах выбран тот момент, когда их начала координат  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$  совпадают.

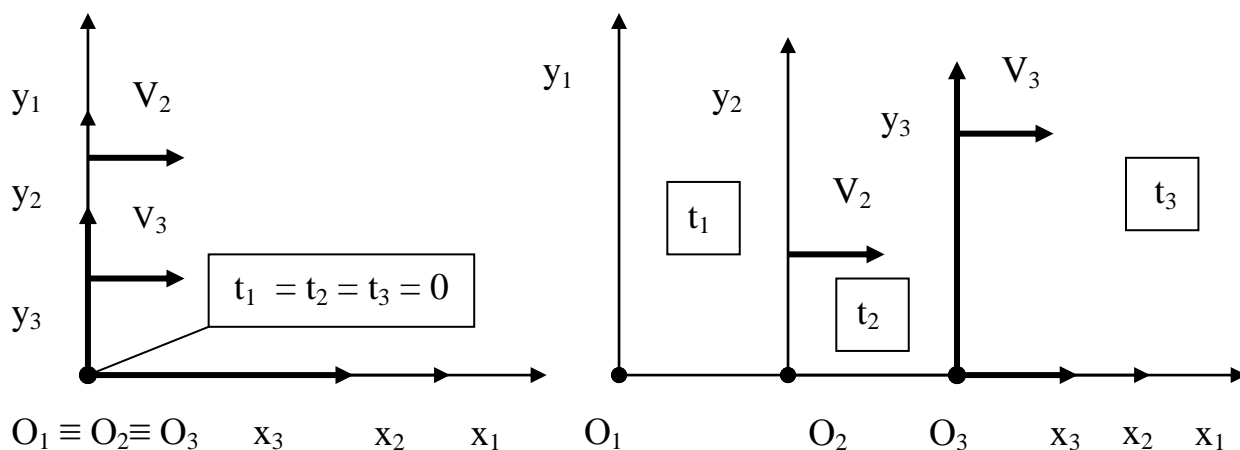


Рис. 2

Опираясь на формулу (41), можно определить значение скорости  $V_{23}$  движения точки  $O_3$  относительно точки  $O_2$ :

$$V_{23} = \frac{V_3 - V_2}{\frac{(1 - \beta_2^2) \cdot V_3}{\beta_2^2 \cdot V_2} + 1} \quad (61)$$

и значение скорости  $V_{32}$  движения точки  $O_2$  относительно точки  $O_3$ :

$$V_{32} = \frac{V_2 - V_3}{\frac{(1 - \beta_3^2) \cdot V_2}{\beta_3^2 \cdot V_3} + 1} \quad (62)$$

где:  $\beta_2$  и  $\beta_3$  - коэффициенты перехода для инерциальных систем отсчета, движущихся относительно неподвижной системы отсчета со скоростью  $V_2$  и  $V_3$ , соответственно.

Используя принцип относительности, согласно которому точка  $O_3$  будет удаляться относительно точки  $O_2$  со скоростью, равной по абсолютной величине и противоположно направленной скорости, с которой точка  $O_2$  удаляется относительно точки  $O_3$ , т.е.:

$$V_{32} = -V_{23} \quad (63)$$

Подставив уравнение (63) в формулы (61) и (62), получим:

$$\frac{(1 - \beta_2^2) \cdot V_3}{\beta_2^2 \cdot V_2} + 1 = \frac{(1 - \beta_3^2) \cdot V_2}{\beta_3^2 \cdot V_3} + 1 \quad (64)$$

Отсюда уравнение для коэффициентов перехода  $\beta_2$  и  $\beta_3$  запишется следующим образом:

$$\beta_3^2 = \frac{\beta_2^2 \cdot V_2^2}{V_3^2 - (\beta_2^2 \cdot V_3^2) + (\beta_2^2 \cdot V_2^2)} \quad (65)$$

#### 2.4. Получение зависимости для коэффициента перехода $\beta$

Из уравнения (64) можно получить формулу:

$$\frac{\beta_2^2 - 1}{\beta_2^2 \cdot V_2^2} = \frac{\beta_3^2 - 1}{\beta_3^2 \cdot V_3^2} \quad (66)$$

Так как величины коэффициентов перехода  $\beta_2$  и  $\beta_3$  не зависят друг от друга, а зависят только от величин скоростей  $V_2$  и  $V_3$ , соответственно, и величины скоростей  $V_2$  и  $V_3$  задавались произвольно (также не зависят друг

от друга), то можно сказать, что:

$$\frac{\beta_2^2 - 1}{\beta_2^2 \cdot V_2^2} = \frac{\beta_3^2 - 1}{\beta_3^2 \cdot V_3^2} = K = Const \quad (67)$$

т.е. получается в общем виде, что:

$$\frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 \cdot V^2} = K = Const \quad (68)$$

где: **K** - постоянная величина, независящая от величины скорости **V** (**V**<sub>2</sub> и **V**<sub>3</sub>) и величины коэффициента перехода **β** (**β**<sub>2</sub> и **β**<sub>3</sub>) и имеющая размерность, обратную квадрату скорости.

Как видно из формулы (68), в зависимости от величины константы **K** коэффициент перехода **β** может иметь следующие значения:

- при **K = 0** коэффициент перехода **β** будет равен 1,
- если константа **K** имеет действительное положительное значение, то коэффициент перехода **β** будет больше или равен 1, т.е. **β ≥ 1**,
- если константа **K** имеет действительное отрицательное значение, то коэффициент перехода **β** будет меньше или равен 1, т.е. **0 < β ≤ 1**.

Но так как константа **K** не зависит от величины скорости **V** и величины коэффициента перехода **β**, то для любого конкретного значения величины скорости **V** получается, что константа **K** не может быть одновременно величиной положительной величиной и отрицательной, т.е. для всех возможных значений скорости **V** значения коэффициента перехода **β** могут находиться только в диапазоне **β ≥ 1** или только в диапазоне **0 < β ≤ 1**.

Одним словом, **β ≥ 1** и **0 < β ≤ 1** являются двумя взаимоисключающими диапазонами коэффициента перехода **β**, т.е. все значения коэффициента перехода **β** в зависимости от величины скорости **V** находятся только в диапазоне **β ≥ 1** или в диапазоне **0 < β ≤ 1**.

Основная задача заключается в выборе одного из этих двух диапазонов, в котором будет в действительности определяться величина коэффициента перехода **β** в зависимости от величины скорости **V** (если **β**

зависит от  $\mathbf{V}$ ).

Из уравнения (68) можно получить формулу для коэффициента перехода  $\beta$ :

$$\beta^2 = \frac{1}{1 - (K \cdot V^2)} \quad (69)$$

Если вернуться к формуле (58):

$$\beta^2 = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{V_{\text{хкр}}^2}} \quad (58)$$

и сравнить ее с формулой (69), то можно отметить, что:

$$K = \frac{1}{V_{\text{хкр}}^2} \quad (70)$$

т.е.  $V_{\text{хкр}}^2$  будет являться постоянной величиной, не зависящей от значений скорости  $\mathbf{V}$  и коэффициента перехода  $\beta$ .

Опираясь на формулы (69) и (70), можно сказать, что в случае, когда коэффициент перехода  $\beta$  не равен 1, должна существовать такая величина скорости  $V_{\text{хкр}}$  (действительная или мнимая) движения точки, которая была бы инвариантна во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета.

Исходя из формулы (69), в формулах для коэффициента перехода  $\beta$ :

- при  $\beta \geq 1$ :

$$\beta_{\geq}^2 = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{V_{\text{хкр}1}^2}} \quad (59)$$

- при  $0 < \beta \leq 1$ :

$$\beta_{\leq}^2 = \frac{1}{1 + \frac{V^2}{V_{\text{хкр}2}^2}} \quad (60)$$

величины  $V_{\text{хкр}1}$  и  $V_{\text{хкр}2}$  будут постоянными величинами, не зависящими от величины скорости  $\mathbf{V}$  и коэффициента перехода  $\beta$ , т.е.:

$$V_{\text{хкр}1} = \text{Const} \quad (71)$$



$$V_{\text{хкр}2} = \text{Const} \quad (72)$$

Граничное условие (при значении скорости  $V$ , равной  $0$ , коэффициент перехода  $\beta$  равен  $1$ ) устанавливает, что при стремлении величины скорости  $V$  к  $0$  коэффициент перехода  $\beta$  стремится к  $1$ , а это, согласно формулам (59) и (60), позволяет отметить, что:

$$V_{\text{хкр}1} \neq 0 \quad (73)$$

$$V_{\text{хкр}2} \neq 0 \quad (74)$$

А в случае, когда коэффициент перехода  $\beta$  не зависит от величины скорости  $V$  (т.е. при значении коэффициента перехода  $\beta = \text{Const} = 1$ ), то:

$$V_{\text{хкр}1} = \infty \quad (75)$$

$$V_{\text{хкр}2} = \infty \quad (76)$$

## **2.5. Основные кинематические уравнения «специальной теории относительности в общем виде»**

Подставив формулу (58) в уравнения (34), (35), (38)÷(39), (40)÷(45) и (46)÷(51), получим следующую систему уравнений:

$$x_1 = \frac{x_2 + (V \cdot t_2)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{\text{хкр}}^2}}} \quad (77)$$

$$x_2 = \frac{x_1 - (V \cdot t_1)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{\text{хкр}}^2}}} \quad (78)$$

$$t_1 = \frac{t_2 + \frac{V \cdot x_2}{V_{\text{хкр}}^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{\text{хкр}}^2}}} \quad (79)$$

$$t_2 = \frac{t_1 - \frac{V \cdot x_1}{V_{\text{хкр}}^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{\text{хкр}}^2}}} \quad (80)$$

$$v_{x1} = \frac{v_{x2} + V}{1 + \frac{V \cdot v_{x2}}{V_{\text{хкр}}^2}} \quad (81)$$

$$v_{x2} = \frac{v_{x1} - V}{1 - \frac{V \cdot v_{x1}}{V_{\text{хкр}}^2}} \quad (82)$$

$$v_{y1} = \frac{v_{y2} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{\text{хкр}}^2}}}{1 + \frac{V \cdot v_{x2}}{V_{\text{хкр}}^2}} \quad (83)$$

$$v_{y2} = \frac{v_{y1} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{\text{хкр}}^2}}}{1 - \frac{V \cdot v_{x1}}{V_{\text{хкр}}^2}} \quad (84)$$

$$v_{z1} = \frac{v_{z2} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{\text{хкр}}^2}}}{1 + \frac{V \cdot v_{x2}}{V_{\text{хкр}}^2}} \quad (85)$$

$$v_{z2} = \frac{v_{z1} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{\text{хкр}}^2}}}{1 - \frac{V \cdot v_{x1}}{V_{\text{хкр}}^2}} \quad (86)$$

$$a_{x1} = \frac{a_{x2} \cdot \left( \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{\text{хкр}}^2}} \right)^3}{\left( 1 + \frac{V \cdot v_{x2}}{V_{\text{хкр}}^2} \right)^3} \quad (87)$$

$$a_{x2} = \frac{a_{x1} \cdot \left( \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{\text{кр}}^2}} \right)^3}{\left( 1 - \frac{V \cdot v_{x1}}{V_{\text{кр}}^2} \right)^3} \quad (88)$$

$$a_{y1} = \frac{\left\{ \left[ a_{y2} \cdot \left( 1 + \frac{V \cdot v_{x2}}{V_{\text{кр}}^2} \right) \right] - \frac{V \cdot a_{x2} \cdot v_{y2}}{V_{\text{кр}}^2} \right\} \cdot \left( 1 - \frac{V^2}{V_{\text{кр}}^2} \right)}{\left( 1 + \frac{V \cdot v_{x2}}{V_{\text{кр}}^2} \right)^3} \quad (89)$$

$$a_{y2} = \frac{\left\{ \left[ a_{y1} \cdot \left( 1 - \frac{V \cdot v_{x1}}{V_{\text{кр}}^2} \right) \right] + \frac{V \cdot a_{x1} \cdot v_{y1}}{V_{\text{кр}}^2} \right\} \cdot \left( 1 - \frac{V^2}{V_{\text{кр}}^2} \right)}{\left( 1 - \frac{V \cdot v_{x1}}{V_{\text{кр}}^2} \right)^3} \quad (90)$$

$$a_{z1} = \frac{\left\{ \left[ a_{z2} \cdot \left( 1 + \frac{V \cdot v_{x2}}{V_{\text{кр}}^2} \right) \right] - \frac{V \cdot a_{x2} \cdot v_{z2}}{V_{\text{кр}}^2} \right\} \cdot \left( 1 - \frac{V^2}{V_{\text{кр}}^2} \right)}{\left( 1 + \frac{V \cdot v_{x2}}{V_{\text{кр}}^2} \right)^3} \quad (91)$$

$$a_{z2} = \frac{\left\{ \left[ a_{z1} \cdot \left( 1 - \frac{V \cdot v_{x1}}{V_{\text{кр}}^2} \right) \right] + \frac{V \cdot a_{x1} \cdot v_{z1}}{V_{\text{кр}}^2} \right\} \cdot \left( 1 - \frac{V^2}{V_{\text{кр}}^2} \right)}{\left( 1 - \frac{V \cdot v_{x1}}{V_{\text{кр}}^2} \right)^3} \quad (92)$$

## 2.6. Основные кинематические уравнения при коэффициенте перехода $\beta \geq 1$

Подставив формулу (59) в уравнения (34), (35), (38)÷(39), (40)÷(45) и (46)÷(51), получим следующую систему уравнений при коэффициенте перехода  $\beta = \beta_>$ :

$$x_{1>} = \frac{x_{2>} + (V \cdot t_{2>})}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{\text{кр}1}^2}}} \quad (93)$$

$$x_{2>} = \frac{x_{1>} - (V \cdot t_{1>})}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{\text{кр}1}^2}}} \quad (94)$$

$$t_{1>} = \frac{t_{2>} + \frac{V \cdot x_{2>}}{v_{\text{кр}1}^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{\text{кр}1}^2}}} \quad (95)$$

$$t_{2>} = \frac{t_{1>} - \frac{V \cdot x_{1>}}{v_{\text{кр}1}^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{\text{кр}1}^2}}} \quad (96)$$

$$v_{x1>} = \frac{v_{x2>} + V}{1 + \frac{V \cdot v_{x2>}}{v_{\text{кр}1}^2}} \quad (97)$$

$$v_{x2>} = \frac{v_{x1>} - V}{1 - \frac{V \cdot v_{x1>}}{v_{\text{кр}1}^2}} \quad (98)$$

$$v_{y1>} = \frac{v_{y2>} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{\text{кр}1}^2}}}{1 + \frac{V \cdot v_{x2>}}{v_{\text{кр}1}^2}} \quad (99)$$

$$v_{y2>} = \frac{v_{y1>} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{\text{кр}1}^2}}}{1 - \frac{V \cdot v_{x1>}}{v_{\text{кр}1}^2}} \quad (100)$$

$$v_{z1>} = \frac{v_{z2>} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{\text{хкр}1}^2}}}{1 + \frac{V \cdot v_{x2>}}{v_{\text{хкр}1}^2}} \quad (101)$$

$$v_{z2>} = \frac{v_{z1>} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{\text{хкр}1}^2}}}{1 - \frac{V \cdot v_{x1>}}{v_{\text{хкр}1}^2}} \quad (102)$$

$$a_{x1>} = \frac{a_{x2>} \cdot \left( \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{\text{хкр}1}^2}} \right)^3}{\left( 1 + \frac{V \cdot v_{x2>}}{v_{\text{хкр}1}^2} \right)^3} \quad (103)$$

$$a_{x2>} = \frac{a_{x1>} \cdot \left( \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{\text{хкр}1}^2}} \right)^3}{\left( 1 - \frac{V \cdot v_{x1>}}{v_{\text{хкр}1}^2} \right)^3} \quad (104)$$

$$a_{y1>} = \frac{\left\{ \left[ a_{y2>} \cdot \left( 1 + \frac{V \cdot v_{x2>}}{v_{\text{хкр}1}^2} \right) \right] - \frac{V \cdot a_{x2>} \cdot v_{y2>}}{v_{\text{хкр}1}^2} \right\} \cdot \left( 1 - \frac{V^2}{v_{\text{хкр}1}^2} \right)}{\left( 1 + \frac{V \cdot v_{x2>}}{v_{\text{хкр}1}^2} \right)^3} \quad (105)$$

$$a_{y2>} = \frac{\left\{ \left[ a_{y1>} \cdot \left( 1 - \frac{V \cdot v_{x1>}}{v_{\text{хкр}1}^2} \right) \right] + \frac{V \cdot a_{x1>} \cdot v_{y1>}}{v_{\text{хкр}1}^2} \right\} \cdot \left( 1 - \frac{V^2}{v_{\text{хкр}1}^2} \right)}{\left( 1 - \frac{V \cdot v_{x1>}}{v_{\text{хкр}1}^2} \right)^3} \quad (106)$$

$$a_{z1>} = \frac{\left\{ \left[ a_{z2>} \cdot \left( 1 + \frac{V \cdot v_{x2>}}{v_{\text{хкр}1}^2} \right) \right] - \frac{V \cdot a_{x2>} \cdot v_{z2>}}{v_{\text{хкр}1}^2} \right\} \cdot \left( 1 - \frac{V^2}{v_{\text{хкр}1}^2} \right)}{\left( 1 + \frac{V \cdot v_{x2>}}{v_{\text{хкр}1}^2} \right)^3} \quad (107)$$

$$a_{z2>} = \frac{\left\{ \left[ a_{z1>} \cdot \left( 1 - \frac{V \cdot v_{x1>}}{v_{\text{хкр}1}^2} \right) \right] + \frac{V \cdot a_{x1>} \cdot v_{z1>}}{v_{\text{хкр}1}^2} \right\} \cdot \left( 1 - \frac{V^2}{v_{\text{хкр}1}^2} \right)}{\left( 1 - \frac{V \cdot v_{x1>}}{v_{\text{хкр}1}^2} \right)^3} \quad (108)$$

## 2.7. Основные кинематические уравнения при коэффициенте перехода $0 < \beta < 1$

Подставив формулу (60) в уравнения (34), (35), (38)÷(39), (40)÷(45) и (46)÷(51), получим систему уравнений для случая, когда коэффициент перехода  $\beta = \beta_{<}$ :

$$x_{1<} = \frac{x_{2<} + (V \cdot t_{2<})}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} \quad (109)$$

$$x_{2<} = \frac{x_{1<} - (V \cdot t_{1<})}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} \quad (110)$$

$$t_{1<} = \frac{t_{2<} - \frac{V \cdot x_{2<}}{v_{\text{хкр}2}^2}}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} \quad (111)$$

$$t_{2<} = \frac{t_{1<} + \frac{V \cdot x_{1<}}{v_{\text{хкр}2}^2}}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} \quad (112)$$

$$v_{x1<} = \frac{v_{x2<} + V}{1 - \frac{V \cdot v_{x2<}}{v_{\text{хкр}2}^2}} \quad (113)$$

$$v_{x2<} = \frac{v_{x1<} - V}{1 + \frac{V \cdot v_{x1<}}{v_{\text{хкр}2}^2}} \quad (114)$$

$$v_{y1<} = \frac{v_{y2<} \cdot \sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}}{1 - \frac{V \cdot v_{x2<}}{v_{\text{хкр}2}^2}} \quad (115)$$

$$v_{y2<} = \frac{v_{y1<} \cdot \sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}}{1 + \frac{V \cdot v_{x1<}}{v_{\text{хкр}2}^2}} \quad (116)$$

$$v_{z1<} = \frac{v_{z2<} \cdot \sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}}{1 - \frac{V \cdot v_{x2<}}{v_{\text{хкр}2}^2}} \quad (117)$$

$$v_{z2<} = \frac{v_{z1<} \cdot \sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}}{1 + \frac{V \cdot v_{x1<}}{v_{\text{хкр}2}^2}} \quad (118)$$

$$a_{x1<} = \frac{a_{x2<} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}1}^2}} \right)^3}{\left( 1 - \frac{V \cdot v_{x2<}}{v_{\text{хкр}1}^2} \right)^3} \quad (119)$$

$$a_{x2<} = \frac{a_{x1<} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}} \right)^3}{\left( 1 + \frac{V \cdot v_{x1<}}{v_{\text{хкр}2}^2} \right)^3} \quad (120)$$

$$a_{y1<} = \frac{\left\{ \left[ a_{y2<} \cdot \left( 1 - \frac{V \cdot v_{x2<}}{v_{\text{хкр}2}^2} \right) \right] + \frac{V \cdot a_{x2<} \cdot v_{y2<}}{v_{\text{хкр}2}^2} \right\} \cdot \left( 1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2} \right)}{\left( 1 - \frac{V \cdot v_{x2<}}{v_{\text{хкр}2}^2} \right)^3} \quad (121)$$

$$a_{y2<} = \frac{\left\{ \left[ a_{y1<} \cdot \left( 1 + \frac{V \cdot v_{x1<}}{v_{\text{хкр}2}^2} \right) \right] - \frac{V \cdot a_{x1<} \cdot v_{y1<}}{v_{\text{хкр}2}^2} \right\} \cdot \left( 1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2} \right)}{\left( 1 + \frac{V \cdot v_{x1<}}{v_{\text{хкр}2}^2} \right)^3} \quad (122)$$

$$a_{z1<} = \frac{\left\{ \left[ a_{z2<} \cdot \left( 1 - \frac{V \cdot v_{x2<}}{v_{\text{хкр}2}^2} \right) \right] + \frac{V \cdot a_{x2<} \cdot v_{z2<}}{v_{\text{хкр}2}^2} \right\} \cdot \left( 1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2} \right)}{\left( 1 - \frac{V \cdot v_{x2<}}{v_{\text{хкр}2}^2} \right)^3} \quad (123)$$

$$a_{z2<} = \frac{\left\{ \left[ a_{z1<} \cdot \left( 1 + \frac{V \cdot v_{x1<}}{v_{\text{хкр}2}^2} \right) \right] - \frac{V \cdot a_{x1<} \cdot v_{z1<}}{v_{\text{хкр}2}^2} \right\} \cdot \left( 1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2} \right)}{\left( 1 + \frac{V \cdot v_{x1<}}{v_{\text{хкр}2}^2} \right)^3} \quad (124)$$

К сожалению, из кинематических уравнений связи определить значение постоянной величины  $\mathbf{V}_{\text{хкр}}$  ( $v_{\text{хкр}1}$  или  $v_{\text{хкр}2}$ ) невозможно, поэтому придется обратиться за помощью к динамике.

### 3. Динамика

Для установления зависимости массы движущегося тела от скорости воспользуемся - с одной стороны - принципом относительности, утверждающим, что физические законы инвариантны по отношению к выбору инерциальной системы отсчета, т.е. уравнения, выражающие эти



законы, имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета.

С другой стороны - постараемся опереться на ограничительные условия к пространству и времени, которые устанавливаются в специальной теории относительности.

Этими условиями являются однородность и изотропность пространства и однородность времени, т.е. симметрия пространства и времени.

Согласно теореме Эммы Нетер симметрии действия соответствует закон сохранения этого действия.

Теорема Эммы Нетер позволяет установить, что:

- закон сохранения механической энергии связан со свойством симметрии времени – однородностью времени (это свойство времени проявляется в том, что законы движения замкнутой системы не зависят от выбора начала отсчета времени);

- закон сохранения импульса связан со свойством симметрии пространства – однородностью пространства (это свойство проявляется в том, что физические свойства замкнутой системы и законы ее движения не зависят от выбора положения начала координат инерциальной системы отсчета, т.е. не изменяются при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы как целого);

- закон сохранения момента импульса связан со свойством симметрии пространства – изотропностью пространства (это свойство пространства проявляется в том, что физические свойства и законы движения замкнутой системы не зависят от выбора направления осей координат инерциальной системы отсчета, т.е. не изменяются при повороте в пространстве замкнутой системы как целого на любой угол).

### **3.1. Системы уравнений для определения зависимости массы движущегося тела от скорости**

Для определения зависимости массы движущегося тела от его скорости перемещения воспользуемся:

- законом сохранения импульса: **импульс замкнутой механической системы тел (на которую не действуют внешние силы) для любого момента времени является величиной постоянной;**

- законом сохранения механической энергии: **механическая энергия консервативной механической системы тел (у которой все внутренние силы потенциальны, а внешние силы потенциальны и стационарны) для любого момента времени является величиной постоянной, который для замкнутых механических систем принимает вид: механическая энергия замкнутой механической системы не изменяется с течением времени, если все внутренние силы, действующие в этой системе, потенциальны, а точнее - его частным случаем, когда у тел, составляющих замкнутую механическую систему, не происходит изменение потенциальной энергии (в том числе, когда тела, составляющие замкнутую механическую систему, испытывают только абсолютно упругие взаимодействия): кинетическая энергия замкнутой механической системы тел для любого момента времени является величиной постоянной.**

Допустим, что зависимость массы тела от скорости его движения не меняется при изменении потенциальной энергии тела.

Предположим, что масса  $M(V)$  материальной точки, движущейся со скоростью  $V$ , равна:

$$M(V) = M_0 \cdot f(V) \quad (125)$$

где:  $M_0$  – масса рассматриваемой материальной точки в состоянии покоя;

$f(V)$  – функция, предположительно зависящая от величины скорости  $V$ .

Исходя из формулы (125), импульс  $P(V)$  материальной точки, движущейся со скоростью  $V$ , равен:

$$P(V) = M_0 \cdot f(V) \cdot V \quad (126)$$

А формула (126) позволяет записать следующее уравнение для

кинетической энергии  $E_k(\mathbf{V})$  материальной точки, движущейся со скоростью  $\mathbf{V}$ :

$$E_k(\mathbf{V}) = M_0 \cdot \int_0^{\mathbf{V}} \{ [f(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{V}] + [f'(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{V}^2] \} \cdot d\mathbf{V} \quad (127)$$

где:  $f'(\mathbf{V})$  – производная функции  $f(\mathbf{V})$ .

Постараемся установить зависимость массы (функции  $f(\mathbf{V})$ ) движущегося тела от скорости его перемещения, рассмотрев взаимодействия (а точнее результаты взаимодействия) тел (материальных точек), составляющих замкнутую механическую систему и перемещающихся в пространстве только линейно.

С целью написания системы уравнений, позволяющих определить значение функции  $f(\mathbf{V})$ , рассмотрим два простейших примера.

### 3.1.1. Пример № 1

Допустим, что имеются две инерциальные системы отсчета, аналогичные системам отсчета, изображенным на рис. 1, - неподвижная  $O_1x_1y_1z_1$  и подвижная  $O_2x_2y_2z_2$ , которая движется со скоростью  $\mathbf{V}$  параллельно оси  $O_1x_1$  относительно системы  $O_1x_1y_1z_1$ .

Предположим, что имеется замкнутая механическая система тел, состоящая из тела 1 и тела 2 (как показано на рис. 3) имеющих массы в состоянии покоя, равные  $M_{01}$  и  $M_{02}$  соответственно.

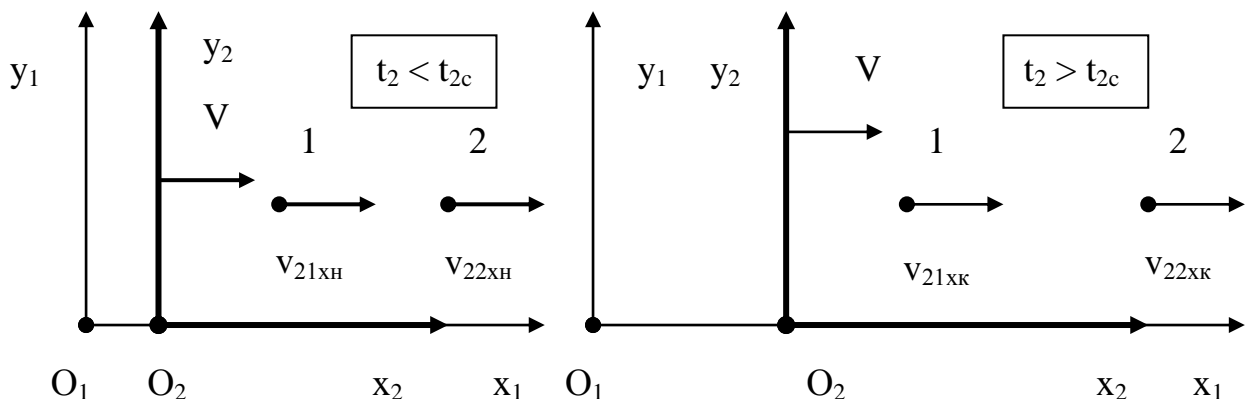


Рис. 3

В подвижной системе отсчета  $\mathbf{O}_2\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2\mathbf{z}_2$  тело 1 и тело 2 до некоторого момента времени  $t_{2c}$  двигались параллельно оси  $\mathbf{O}_2\mathbf{x}_2$  по одной линии с постоянными по величине скоростями  $v_{21xH}$  и  $v_{22xH}$  соответственно.

В какой-то момент времени  $t_{2c}$  между телами 1 и 2 произошло абсолютно упругое прямое центральное столкновение.

Далее после столкновения в момент времени  $t_{2c}$  тела 1 и 2 стали двигаться параллельно оси  $\mathbf{O}_2\mathbf{x}_2$  по одной линии с постоянными по величине скоростями  $v_{21xK}$  и  $v_{22xK}$  соответственно.

Учитывая, что между телами 1 и 2 имело место прямое центральное столкновение, и рассматривая их как материальные точки, запишем закон сохранения импульса для замкнутой механической системы тел 1 и 2 в подвижной системе отсчета  $\mathbf{O}_2\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2\mathbf{z}_2$  для моментов времени меньшего и большего, чем  $t_{2c}$  :

$$\begin{aligned} & [M_{01} \cdot f(V = v_{21xH}) \cdot v_{21xH}] + [M_{02} \cdot f(V = v_{22xH}) \cdot v_{22xH}] = \\ & = [M_{01} \cdot f(V = v_{21xK}) \cdot v_{21xK}] + [M_{02} \cdot f(V = v_{22xK}) \cdot v_{22xK}] \quad (128) \end{aligned}$$

А операясь на то, что столкновение тел 1 и 2 носило абсолютно упругий характер, можно записать закон сохранения механической энергии для замкнутой механической системы тел 1 и 2 в подвижной системе отсчета  $\mathbf{O}_2\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2\mathbf{z}_2$  для моментов времени меньшего и большего, чем  $t_{2c}$ , предполагая, что величины потенциальных энергий тел 1 и 2 остаются неизменными до и после столкновения:

$$\begin{aligned} & \langle M_{01} \cdot \int_0^{v_{21xH}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle + \\ & + \langle M_{02} \cdot \int_0^{v_{22xH}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle = \\ & = \langle M_{01} \cdot \int_0^{v_{21xK}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle + \end{aligned}$$

$$+ \langle M_{02} \cdot \int_0^{v_{22xk}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle \quad (129)$$

Все ранее сказанное о движении тел 1 и 2 в подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  можно сказать и о движении тел 1 и 2 в неподвижной системе отчета  $O_1x_1y_1z_1$ , за исключением того, что:

- столкновение между телами 1 и 2 происходит в момент времени  $t_{1c}$ , соответствующий моменту времени  $t_{2c}$  в системе  $O_2x_2y_2z_2$ ,

- тело 1 имеет соответственно до и после столкновения скорости  $v_{11xH}$  и  $v_{11xK}$ , соответствующие скоростям  $v_{21xH}$  и  $v_{21xK}$ ,

- тело 2 имеет соответственно до и после столкновения скорости  $v_{12xH}$  и  $v_{12xK}$ , соответствующие скоростям  $v_{22xH}$  и  $v_{22xK}$ .

Аналогично формулам (128) и (129) можно записать закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии для замкнутой механической системы тел 1 и 2 в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  для моментов времени меньшего и большего, чем  $t_{1c}$ , также предполагая, что величины потенциальных энергий тел 1 и 2 остаются неизменными до и после столкновения:

$$[M_{01} \cdot f(V = v_{11xH}) \cdot v_{11xH}] + [M_{02} \cdot f(V = v_{12xH}) \cdot v_{12xH}] = \\ = [M_{01} \cdot f(V = v_{11xK}) \cdot v_{11xK}] + [M_{02} \cdot f(V = v_{12xK}) \cdot v_{12xK}] \quad (130)$$

$$\langle M_{01} \cdot \int_0^{v_{11xH}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle + \\ + \langle M_{02} \cdot \int_0^{v_{12xH}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle = \\ = \langle M_{01} \cdot \int_0^{v_{11xK}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle + \\ + \langle M_{02} \cdot \int_0^{v_{12xK}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle \quad (131)$$

### 3.1.2. Пример № 2

Пример № 2 подобен примеру № 1 и отличается от него только тем, что в подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  тела 1 и тела 2 двигаются не параллельно оси  $O_2x_2$ , а параллельно оси  $O_2y_2$ , как показано на рис. 4.

В подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  тела 1 и тела 2 до некоторого момента времени  $t_{2c}$  двигались параллельно оси  $O_2y_2$  по одной линии с постоянными по величине скоростями  $v_{21yH}$  и  $v_{22yH}$  соответственно.

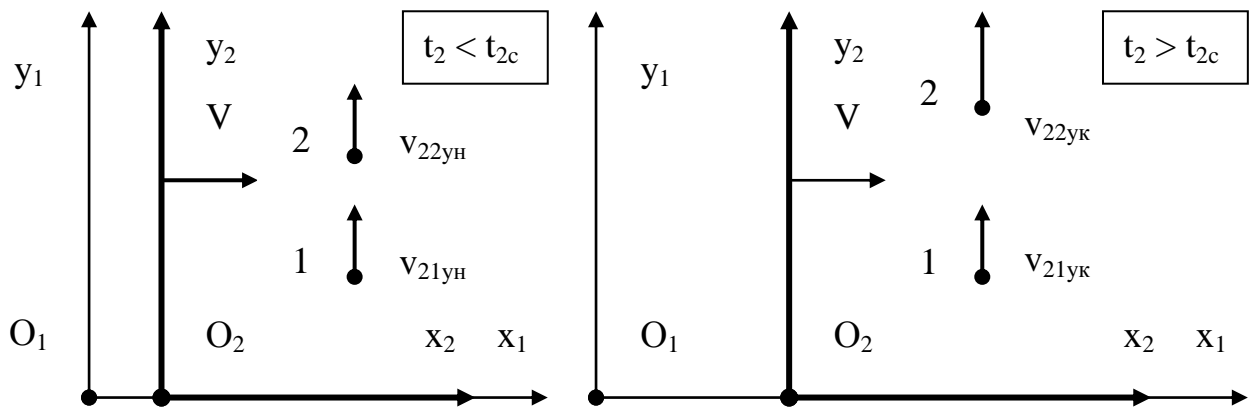


Рис. 4

После столкновения в момент времени больший  $t_{2c}$  тела 1 и 2 стали двигаться параллельно оси  $O_2y_2$  по одной линии с постоянными по величине скоростями  $v_{21yK}$  и  $v_{22yK}$  соответственно.

Тогда можно записать закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии для замкнутой механической системы тел 1 и 2 в подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  для моментов времени меньшего и большего, чем  $t_{2c}$ , предполагая, что величины потенциальных энергий тел 1 и 2 остаются неизменными до и после столкновения:

$$\begin{aligned}
 & [M_{01} \cdot f(V = v_{21yH}) \cdot v_{21yH}] + [M_{02} \cdot f(V = v_{22yH}) \cdot v_{22yH}] = \\
 & = [M_{01} \cdot f(V = v_{21yK}) \cdot v_{21yK}] + [M_{02} \cdot f(V = v_{22yK}) \cdot v_{22yK}] \quad (132) \\
 & \langle M_{01} \cdot \int_0^{v_{21yH}} \{ [f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2] \} \cdot dV \rangle +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \langle M_{02} \cdot \int_0^{v_{22ун}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle = \\
& = \langle M_{01} \cdot \int_0^{v_{21ук}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle + \\
& + \langle M_{02} \cdot \int_0^{v_{22ук}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle \quad (133)
\end{aligned}$$

Учитывая, что о движении тел 1 и 2 в подвижной системе отсчета  $\mathbf{O}_2\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2\mathbf{z}_2$  в отличие от их движения в неподвижной системе отсчета  $\mathbf{O}_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1\mathbf{z}_1$  можно сказать, что:

- столкновение между телами 1 и 2 происходит в момент времени  $t_{1с}$ , соответствующий моменту времени  $t_{2с}$  в системе  $\mathbf{O}_2\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2\mathbf{z}_2$ ,

- тело 1 имеет соответственно до и после столкновения проекции скорости на оси координат  $\mathbf{O}_1\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{O}_1\mathbf{y}_1$   $v_{11хн} = V$ ,  $v_{11ун}$ ,  $v_{11хк} = V$  и  $v_{11ук}$ , соответствующие скоростям  $v_{21хн}$  и  $v_{21хк}$ ,

- тело 2 имеет соответственно до и после столкновения проекции скорости на оси координат  $\mathbf{O}_1\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{O}_1\mathbf{y}_1$   $v_{12хн} = V$ ,  $v_{12ун}$ ,  $v_{12хк} = V$  и  $v_{12ук}$ , соответствующие скоростям  $v_{22хн}$  и  $v_{22хк}$ .

Аналогично можно записать закон сохранения импульса (два уравнения для проекций импульса на оси  $\mathbf{O}_1\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{O}_1\mathbf{y}_1$ ) и закон сохранения механической энергии для замкнутой механической системы тел 1 и 2 в неподвижной системе отсчета  $\mathbf{O}_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1\mathbf{z}_1$  для моментов времени меньшего и большего, чем  $t_{1с}$ , предполагая, что величины потенциальных энергий тел 1 и 2 остаются неизменными до и после столкновения:

$$\begin{aligned}
& \left[ M_{01} \cdot f\left(V = \sqrt{v_{11ун}^2 + V^2}\right) \cdot V \right] + \left[ M_{02} \cdot f\left(V = \sqrt{v_{12ун}^2 + V^2}\right) \cdot V \right] = \\
& = \left[ M_{01} \cdot f\left(V = \sqrt{v_{11ук}^2 + V^2}\right) \cdot V \right] + \left[ M_{02} \cdot f\left(V = \sqrt{v_{12ук}^2 + V^2}\right) \cdot V \right] \quad (134) \\
& \left[ M_{01} \cdot f\left(V = \sqrt{v_{11ун}^2 + V^2}\right) \cdot v_{11ун} \right] + \left[ M_{02} \cdot f\left(V = \sqrt{v_{12ун}^2 + V^2}\right) \cdot v_{12ун} \right] =
\end{aligned}$$

$$= \left[ M_{01} \cdot f\left(V = \sqrt{v_{11\text{ук}}^2 + V^2}\right) \cdot v_{11\text{ук}} \right] + \\ + \left[ M_{02} \cdot f\left(V = \sqrt{v_{12\text{ук}}^2 + V^2}\right) \cdot v_{12\text{ук}} \right] \quad (135)$$

$$\langle M_{01} \cdot \int_0^{\sqrt{v_{11\text{уН}}^2 + V^2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle + \\ + \langle M_{02} \cdot \int_0^{\sqrt{v_{12\text{уН}}^2 + V^2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle = \\ = \langle M_{01} \cdot \int_0^{\sqrt{v_{11\text{ук}}^2 + V^2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle + \\ + \langle M_{02} \cdot \int_0^{\sqrt{v_{12\text{ук}}^2 + V^2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle \quad (136)$$

### 3.1.3. Зависимость массы движущегося тела от скорости

С целью определения зависимости для массы движущегося тела составим следующую систему уравнений:

$$[M_{01} \cdot f(V = v_{21\text{хН}}) \cdot v_{21\text{хН}}] + [M_{02} \cdot f(V = v_{22\text{хН}}) \cdot v_{22\text{хН}}] = \\ = [M_{01} \cdot f(V = v_{21\text{хК}}) \cdot v_{21\text{хК}}] + [M_{02} \cdot f(V = v_{22\text{хК}}) \cdot v_{22\text{хК}}] \quad (128)$$

$$\langle M_{01} \cdot \int_0^{v_{21\text{хН}}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle + \\ + \langle M_{02} \cdot \int_0^{v_{22\text{хН}}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle = \\ = \langle M_{01} \cdot \int_0^{v_{21\text{хК}}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle +$$



$$+ \langle M_{02} \cdot \int_0^{v_{22xk}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle \quad (129)$$

$$\begin{aligned} & [M_{01} \cdot f(V = v_{11xH}) \cdot v_{11xH}] + [M_{02} \cdot f(V = v_{12xH}) \cdot v_{12xH}] = \\ & = [M_{01} \cdot f(V = v_{11xk}) \cdot v_{11xk}] + [M_{02} \cdot f(V = v_{12xk}) \cdot v_{12xk}] \end{aligned} \quad (130)$$

$$\begin{aligned} & \langle M_{01} \cdot \int_0^{v_{11xH}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle + \\ & + \langle M_{02} \cdot \int_0^{v_{12xH}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle = \\ & = \langle M_{01} \cdot \int_0^{v_{11xk}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle + \\ & + \langle M_{02} \cdot \int_0^{v_{12xk}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle \end{aligned} \quad (131)$$

$$\begin{aligned} & [M_{01} \cdot f(V = v_{21yH}) \cdot v_{21yH}] + [M_{02} \cdot f(V = v_{22yH}) \cdot v_{22yH}] = \\ & = [M_{01} \cdot f(V = v_{21yk}) \cdot v_{21yk}] + [M_{02} \cdot f(V = v_{22yk}) \cdot v_{22yk}] \end{aligned} \quad (132)$$

$$\begin{aligned} & \langle M_{01} \cdot \int_0^{v_{21yH}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle + \\ & + \langle M_{02} \cdot \int_0^{v_{22yH}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle = \\ & = \langle M_{01} \cdot \int_0^{v_{21yk}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle + \\ & + \langle M_{02} \cdot \int_0^{v_{22yk}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle \end{aligned} \quad (133)$$

$$\begin{aligned} & [M_{01} \cdot f(V = \sqrt{v_{11yH}^2 + V^2}) \cdot V] + [M_{02} \cdot f(V = \sqrt{v_{12yH}^2 + V^2}) \cdot V] = \\ & = [M_{01} \cdot f(V = \sqrt{v_{11yk}^2 + V^2}) \cdot V] + [M_{02} \cdot f(V = \sqrt{v_{12yk}^2 + V^2}) \cdot V] \end{aligned} \quad (134)$$

$$\begin{aligned}
& \left[ M_{01} \cdot f\left(V = \sqrt{v_{11yH}^2 + V^2}\right) \cdot v_{11yH} \right] + \left[ M_{02} \cdot f\left(V = \sqrt{v_{12yH}^2 + V^2}\right) \cdot v_{12yH} \right] = \\
& = \left[ M_{01} \cdot f\left(V = \sqrt{v_{11yK}^2 + V^2}\right) \cdot v_{11yK} \right] + \\
& + \left[ M_{02} \cdot f\left(V = \sqrt{v_{12yK}^2 + V^2}\right) \cdot v_{12yK} \right] \quad (135)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle M_{01} \cdot \int_0^{\sqrt{v_{11yH}^2 + V^2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle + \\
& + \langle M_{02} \cdot \int_0^{\sqrt{v_{12yH}^2 + V^2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle = \\
& = \langle M_{01} \cdot \int_0^{\sqrt{v_{11yK}^2 + V^2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle + \\
& + \langle M_{02} \cdot \int_0^{\sqrt{v_{12yK}^2 + V^2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle \quad (136)
\end{aligned}$$

В эту систему уравнений нужно также добавить уравнения связи между проекциями скоростей тел 1 и 2 в подвижной  $\mathbf{O}_2\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2\mathbf{z}_2$  и неподвижной  $\mathbf{O}_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1\mathbf{z}_1$  системах отсчета, записанные исходя из формул (81) и (83):

$$v_{11xH} = \frac{v_{21xH} + V}{1 + \frac{V \cdot v_{21xH}}{V_{xkp}^2}} \quad (137)$$

$$v_{12xH} = \frac{v_{22xH} + V}{1 + \frac{V \cdot v_{22xH}}{V_{xkp}^2}} \quad (138)$$

$$v_{11xK} = \frac{v_{21xK} + V}{1 + \frac{V \cdot v_{21xK}}{V_{xkp}^2}} \quad (139)$$

$$v_{12xK} = \frac{v_{22xK} + V}{1 + \frac{V \cdot v_{22xK}}{V_{xkp}^2}} \quad (140)$$

$$v_{11уn} = v_{21уn} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{хкр}^2}} \quad (141)$$

$$v_{11уk} = v_{21уk} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{хкр}^2}} \quad (142)$$

$$v_{12уn} = v_{22уn} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{хкр}^2}} \quad (143)$$

$$v_{12уk} = v_{22уk} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{хкр}^2}} \quad (144)$$

И так, имеется 17 уравнений, 12 неизвестных значений и одна неизвестная функция.

Единственной функцией  $f(V)$ , способной удовлетворить всем требованиям 17 уравнений, является:

$$f(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{хкр}^2}}} \quad (145)$$

Тогда, с учетом уравнений (125)÷(127), можно записать зависимости для массы  $M(V)$ , импульса  $P(V)$  и кинетической энергии  $E_k(V)$  движущегося тела со скоростью  $V$ :

$$M(V) = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{хкр}^2}}} \quad (146)$$

$$P(V) = \frac{M_0 \cdot V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{хкр}^2}}} \quad (147)$$

$$E_k(V) = M_0 \cdot V_{хкр}^2 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{хкр}^2}}} - 1 \right) \quad (148)$$

### 3.1.4. Зависимость массы движущегося тела от скорости при коэффициенте перехода $\beta > 1$

В случае, когда значение коэффициента перехода  $\beta$  находится в диапазоне  $\beta > 1$ , то исходя из формул (145)÷(148) с учетом уравнения (55) зависимости для функции  $f(V)_>$ , массы  $M(V)_>$ , импульса  $P(V)_>$ , кинетической энергии  $E_k(V)_>$  движущегося тела со скоростью  $V$ , можно записать:

$$f(V)_> = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{\text{кр}1}^2}}} \quad (149)$$

$$M(V)_> = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{\text{кр}1}^2}}} \quad (150)$$

$$P(V)_> = \frac{M_0 \cdot V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{\text{кр}1}^2}}} \quad (151)$$

$$E_k(V)_> = M_0 \cdot v_{\text{кр}1}^2 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{\text{кр}1}^2}}} - 1 \right) \quad (152)$$

#### 3.1.4.1. Проверка правильности выбора формулы (145) при $\beta > 1$ (для примеров № 1 и № 2)

Сначала перепишем формулы (128)÷(136) с учетом формул (55) и (149)÷(152):

$$\frac{M_{01} \cdot v_{21\text{хн}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{21\text{хн}}^2}{v_{\text{кр}1}^2}}} + \frac{M_{02} \cdot v_{22\text{хн}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{22\text{хн}}^2}{v_{\text{кр}1}^2}}} = \frac{M_{01} \cdot v_{21\text{хк}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{21\text{хк}}^2}{v_{\text{кр}1}^2}}} + \frac{M_{02} \cdot v_{22\text{хк}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{22\text{хк}}^2}{v_{\text{кр}1}^2}}} \quad (153)$$

$$\frac{M_{01}}{\sqrt{1 - \frac{v_{21xH}^2}{v_{xkp1}^2}}} + \frac{M_{02}}{\sqrt{1 - \frac{v_{22xH}^2}{v_{xkp1}^2}}} = \frac{M_{01}}{\sqrt{1 - \frac{v_{21xK}^2}{v_{xkp1}^2}}} + \frac{M_{02}}{\sqrt{1 - \frac{v_{22xK}^2}{v_{xkp1}^2}}} \quad (154)$$

$$\frac{M_{01} \cdot v_{11xH}}{\sqrt{1 - \frac{v_{11xH}^2}{v_{xkp1}^2}}} + \frac{M_{02} \cdot v_{12xH}}{\sqrt{1 - \frac{v_{12xH}^2}{v_{xkp1}^2}}} = \frac{M_{01} \cdot v_{11xK}}{\sqrt{1 - \frac{v_{11xK}^2}{v_{xkp1}^2}}} + \frac{M_{02} \cdot v_{12xK}}{\sqrt{1 - \frac{v_{12xK}^2}{v_{xkp1}^2}}} \quad (155)$$

$$\frac{M_{01}}{\sqrt{1 - \frac{v_{11xH}^2}{v_{xkp1}^2}}} + \frac{M_{02}}{\sqrt{1 - \frac{v_{12xH}^2}{v_{xkp1}^2}}} = \frac{M_{01}}{\sqrt{1 - \frac{v_{11xK}^2}{v_{xkp1}^2}}} + \frac{M_{02}}{\sqrt{1 - \frac{v_{12xK}^2}{v_{xkp1}^2}}} \quad (156)$$

$$\frac{M_{01} \cdot v_{21yH}}{\sqrt{1 - \frac{v_{21yH}^2}{v_{xkp1}^2}}} + \frac{M_{02} \cdot v_{22yH}}{\sqrt{1 - \frac{v_{22yH}^2}{v_{xkp1}^2}}} = \frac{M_{01} \cdot v_{21yK}}{\sqrt{1 - \frac{v_{21yK}^2}{v_{xkp1}^2}}} + \frac{M_{02} \cdot v_{22yK}}{\sqrt{1 - \frac{v_{22yK}^2}{v_{xkp1}^2}}} \quad (157)$$

$$\frac{M_{01}}{\sqrt{1 - \frac{v_{21yH}^2}{v_{xkp1}^2}}} + \frac{M_{02}}{\sqrt{1 - \frac{v_{22yH}^2}{v_{xkp1}^2}}} = \frac{M_{01}}{\sqrt{1 - \frac{v_{21yK}^2}{v_{xkp1}^2}}} + \frac{M_{02}}{\sqrt{1 - \frac{v_{22yK}^2}{v_{xkp1}^2}}} \quad (158)$$

$$\begin{aligned} & \frac{M_{01} \cdot V}{\sqrt{1 - \frac{v_{11yH}^2 + V^2}{v_{xkp1}^2}}} + \frac{M_{02} \cdot V}{\sqrt{1 - \frac{v_{12yH}^2 + V^2}{v_{xkp1}^2}}} = \\ & = \frac{M_{01} \cdot V}{\sqrt{1 - \frac{v_{11yK}^2 + V^2}{v_{xkp1}^2}}} + \frac{M_{02} \cdot V}{\sqrt{1 - \frac{v_{12yK}^2 + V^2}{v_{xkp1}^2}}} \end{aligned} \quad (159)$$

$$\begin{aligned} & \frac{M_{01} \cdot v_{11yH}}{\sqrt{1 - \frac{v_{11yH}^2 + V^2}{v_{xkp1}^2}}} + \frac{M_{02} \cdot v_{12yH}}{\sqrt{1 - \frac{v_{12yH}^2 + V^2}{v_{xkp1}^2}}} = \\ & = \frac{M_{01} \cdot v_{11yK}}{\sqrt{1 - \frac{v_{11yK}^2 + V^2}{v_{xkp1}^2}}} + \frac{M_{02} \cdot v_{12yK}}{\sqrt{1 - \frac{v_{12yK}^2 + V^2}{v_{xkp1}^2}}} \end{aligned} \quad (160)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{M_{01}}{\sqrt{1 - \frac{v_{11уН}^2 + V^2}{v_{хкр1}^2}}} + \frac{M_{02}}{\sqrt{1 - \frac{v_{12уН}^2 + V^2}{v_{хкр1}^2}}} = \\
& = \frac{M_{01}}{\sqrt{1 - \frac{v_{11уК}^2 + V^2}{v_{хкр1}^2}}} + \frac{M_{02}}{\sqrt{1 - \frac{v_{12уК}^2 + V^2}{v_{хкр1}^2}}} \quad (161)
\end{aligned}$$

Где, исходя из формул (55) и (137)÷(144):

$$v_{11хН} = \frac{v_{21хН} + V}{1 + \frac{V \cdot v_{21хН}}{v_{хкр1}^2}} \quad (162)$$

$$v_{12хН} = \frac{v_{22хН} + V}{1 + \frac{V \cdot v_{22хН}}{v_{хкр1}^2}} \quad (163)$$

$$v_{11хК} = \frac{v_{21хК} + V}{1 + \frac{V \cdot v_{21хК}}{v_{хкр1}^2}} \quad (164)$$

$$v_{12хК} = \frac{v_{22хК} + V}{1 + \frac{V \cdot v_{22хК}}{v_{хкр1}^2}} \quad (165)$$

$$v_{11уН} = v_{21уН} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{хкр1}^2}} \quad (166)$$

$$v_{11уК} = v_{21уК} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{хкр1}^2}} \quad (167)$$

$$v_{12уН} = v_{22уН} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{хкр1}^2}} \quad (168)$$

$$v_{12уК} = v_{22уК} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{хкр1}^2}} \quad (169)$$

Предположим, что  $M_{01} = 1$ ,  $M_{02} = 0,5$ ,  $V / v_{хкр1} = 0,5$ ,  $v_{21хН} / v_{хкр1} = v_{21уН} / v_{хкр1} = 0,9$ ,  $v_{22хН} / v_{хкр1} = v_{22уН} / v_{хкр1} = 0,6$ .

Тогда числовые расчеты дают следующие результаты для примера № 1:

I. В подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  :

1) тело 1 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 1	До столкновения	скорость $v_{21xH} / v_{xkp1}$	0,9
		масса $M_{21H}$	2,294157338706
		импульс $P_{21H} / v_{xkp1}$	2,064741604835
		кинетическая энергия $E_{k21H} / v_{xkp1}^2$	1,294157338706
	После столкновения	скорость $v_{21xK} / v_{xkp1}$	0,7360143377
		масса $M_{21K}$	1,477179174242
		импульс $P_{21K} / v_{xkp1}$	1,087225051595
		кинетическая энергия $E_{k21K} / v_{xkp1}^2$	0,477179174242

2) тело 2 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 2	До столкновения	скорость $v_{22xH} / v_{xkp1}$	0,6
		масса $M_{22H}$	0,625
		импульс $P_{22H} / v_{xkp1}$	0,375
		кинетическая энергия $E_{k22H} / v_{xkp1}^2$	0,125
	После столкновения	скорость $v_{22xK} / v_{xkp1}$	0,937959108239
		масса $M_{22K}$	1,441978164463
		импульс $P_{22K} / v_{xkp1}$	1,35251655324
		кинетическая энергия $E_{k22K} / v_{xkp1}^2$	0,941978164463

3) система тел 1 и 2 имела:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Система тел 1 и 2	До столкновения	масса ( $M_{21н} + M_{22н}$ )	2,919157338706
		импульс $(P_{21н} + P_{22н}) / v_{хкр1}$	2,439741604835
		кинетическая энергия $E_{к22н} / v_{хкр1}^2$	1,419157338706
	После столкновения	масса ( $M_{21к} + M_{22к}$ )	2,919157338706
		импульс $(P_{21к} + P_{22к}) / v_{хкр1}$	2,439741604835
		кинетическая энергия $(E_{к21к} + E_{к22к}) / v_{хкр1}^2$	1,419157338706

II. В неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$ :

1) тело 1 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 1	До столкновения	скорость $v_{11хн} / v_{хкр1}$	0,965517241379
		масса $M_{11н}$	3,841143835489
		импульс $P_{11н} / v_{хкр1}$	3,708690599782
		кинетическая энергия $E_{к11н} / v_{хкр1}^2$	2,841143835489
	После столкновения	скорость $v_{11хк} / v_{хкр1}$	0,903514517939
		масса $M_{11к}$	2,333409263988
		импульс $P_{11к} / v_{хкр1}$	2,108269146306
		кинетическая энергия $E_{к11к} / v_{хкр1}^2$	1,333409263988

2) тело 2 имело:



Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 2	До столкновения	скорость $v_{12хн} / v_{хкр1}$	0,846153846154
		масса $M_{12н}$	0,938194187433
		импульс $P_{12н} / v_{хкр1}$	0,793856620136
		кинетическая энергия $E_{к12н} / v_{хкр1}^2$	0,438194187433
	После столкновения	скорость $v_{12хк} / v_{хкр1}$	0,978882996844
		масса $M_{12к}$	2,445928758933
		импульс $P_{12к} / v_{хкр1}$	2,394278073612
		кинетическая энергия $E_{к12к} / v_{хкр1}^2$	1,945928758933

3) система тел 1 и 2 имела:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Система тел 1 и 2	До столкновения	масса ( $M_{11н} + M_{12н}$ )	4,779338022922
		импульс $(P_{11н} + P_{12н}) / v_{хкр1}$	4,502547219918
		кинетическая энергия $(E_{к11н} + E_{к12н}) / v_{хкр1}^2$	3,279338022922
	После столкновения	масса ( $M_{11к} + M_{12к}$ )	4,779338022922
		импульс $(P_{11к} + P_{12к}) / v_{хкр1}$	4,502547219918
		кинетическая энергия $(E_{к11к} + E_{к12к}) / v_{хкр1}^2$	3,279338022922

Для примера № 2 числовые расчеты дают следующие результаты:

I. В подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$ :

1) тело 1 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 1	До столкновения	скорость $v_{21yH} / v_{xkp1}$	0,9
		масса $M_{21H}$	2,294157338706
		импульс $P_{21H} / v_{xkp1}$	2,064741604835
		кинетическая энергия $E_{k21H} / v_{xkp1}^2$	1,294157338706
	После столкновения	скорость $v_{21yK} / v_{xkp1}$	0,7360143377
		масса $M_{21K}$	1,477179174242
		импульс $P_{21K} / v_{xkp1}$	1,087225051595
		кинетическая энергия $E_{k21K} / v_{xkp1}^2$	0,477179174242

2) тело 2 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 2	До столкновения	скорость $v_{22yH} / v_{xkp1}$	0,6
		масса $M_{22H}$	0,625
		импульс $P_{22H} / v_{xkp1}$	0,375
		кинетическая энергия $E_{k22H} / v_{xkp1}^2$	0,125
	После столкновения	скорость $v_{22yK} / v_{xkp1}$	0,937959108239
		масса $M_{22K}$	1,441978164463
		импульс $P_{22K} / v_{xkp1}$	1,35251655324
		кинетическая энергия $E_{k22K} / v_{xkp1}^2$	0,941978164463

3) система тел 1 и 2 имела:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Система тел 1 и 2	До столкновения	масса ( $M_{21н} + M_{22н}$ )	2,919157338706
		импульс ( $P_{21н} + P_{22н}$ ) / $v_{хкр1}$	2,439741604835
		кинетическая энергия $E_{к22н} / v_{хкр1}^2$	1,419157338706
	После столкновения	масса ( $M_{21к} + M_{22к}$ )	2,919157338706
		импульс ( $P_{21к} + P_{22к}$ ) / $v_{хкр1}$	2,439741604835
		кинетическая энергия ( $E_{к21к} + E_{к22к}$ ) / $v_{хкр1}^2$	1,419157338706

II. В неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$ :

1) тело 1 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 1	До столкновения	проекция скорости $v_{11хн} / v_{хкр1}$	0,5
		проекция скорости $v_{11ун} / v_{хкр1}$	0,779422863406
		масса $M_{11н}$	2,64906471413
		проекция импульса $P_{11хн} / v_{хкр1}$	1,324532357065
		проекция импульса $P_{11ун} / v_{хкр1}$	2,064741604835
		кинетическая энергия $E_{к11н} / v_{хкр1}^2$	1,64906471413
	После столкновения	проекция скорости $v_{11хк} / v_{хкр1}$	0,5
		проекция скорости $v_{11ук} / v_{хкр1}$	0,637407113998
		масса $M_{11к}$	1,70569958778
		проекция импульса $P_{11хк} / v_{хкр1}$	0,85284979389
		проекция импульса $P_{11ук} / v_{хкр1}$	1,087225051595
		кинетическая энергия $E_{к11к} / v_{хкр1}^2$	0,70569958778

2) тело 2 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 2	До столкновения	проекция скорости $v_{12xH} / v_{xkp1}$	0,5
		проекция скорости $v_{12yH} / v_{xkp1}$	0,519615242271
		масса $M_{12H}$	0,721687836487
		проекция импульса $P_{12xH} / v_{xkp1}$	0,360843918244
		проекция импульса $P_{12yH} / v_{xkp1}$	0,375
		кинетическая энергия $E_{k12H} / v_{xkp1}^2$	0,221687836487
	После столкновения	проекция скорости $v_{12xK} / v_{xkp1}$	0,5
		проекция скорости $v_{12yK} / v_{xkp1}$	0,812296415446
		масса $M_{12K}$	1,665052962837
		проекция импульса $P_{12xK} / v_{xkp1}$	0,832526481418
		проекция импульса $P_{12yK} / v_{xkp1}$	1,35251655324
		кинетическая энергия $E_{k12K} / v_{xkp1}^2$	1,165052962837

3) система тел 1 и 2 имела:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Система тел 1 и 2	До столкновения	масса ( $M_{11H} + M_{12H}$ )	3,370752550617
		проекция импульса $(P_{11xH} + P_{12xH}) / v_{xkp1}$	1,685376275309
		проекция импульса $(P_{11yH} + P_{12yH}) / v_{xkp1}$	2,439741604835
		кинетическая энергия $(E_{k11H} + E_{k12H}) / v_{xkp1}^2$	1,870752550617
	После столкновения	масса ( $M_{11K} + M_{12K}$ )	3,370752550617
		проекция импульса $(P_{11xK} + P_{12xK}) / v_{xkp1}$	1,685376275309
		проекция импульса $(P_{11yK} + P_{12yK}) / v_{xkp1}$	2,439741604835
		кинетическая энергия $(E_{k11K} + E_{k12K}) / v_{xkp1}^2$	1,870752550617

По результатам расчета можно сделать следующий вывод: в примерах

№ 1 и № 2 в подвижной  $O_2x_2y_2z_2$  и неподвижной  $O_1x_1y_1z_1$  системах отсчета до и после столкновения масса, импульс и кинетическая энергия механической системы тел 1 и 2 остаются неизменными.

Следовательно, формулы (145)÷(148) в случае, когда коэффициент перехода  $\beta > 1$ , удовлетворяют требованиям системы уравнений (128)÷(136).

### 3.1.5. Зависимость массы движущегося тела от скорости при коэффициенте перехода $0 < \beta < 1$

В случае, когда значение коэффициента перехода  $\beta$  находится в диапазоне  $0 < \beta < 1$ , то, исходя из формул (145)÷(148) с учетом уравнения (56) зависимости для функции  $f(V)_<$ , массы  $M(V)_<$ , импульса  $P(V)_<$ , кинетической энергии  $E_k(V)_<$  движущегося тела со скоростью  $V$ , можно записать:

$$f(V)_< = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} \quad (170)$$

$$M(V)_< = \frac{M_0}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} \quad (171)$$

$$P(V)_< = \frac{M_0 \cdot V}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} \quad (172)$$

$$E_k(V)_< = M_0 \cdot v_{\text{хкр}2}^2 \cdot \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} \right) \quad (173)$$

#### 3.1.5.1. Проверка правильности выбора формулы (145) при $0 < \beta < 1$

## (для примеров № 1 и № 2)

Сначала перепишем формулы (128)÷(136) с учетом формул (56) и (170)÷(173):

$$\frac{M_{01} \cdot v_{21xH}}{\sqrt{1 + \frac{v_{21xH}^2}{v_{xkp2}^2}}} + \frac{M_{02} \cdot v_{22xH}}{\sqrt{1 + \frac{v_{22xH}^2}{v_{xkp2}^2}}} = \frac{M_{01} \cdot v_{21xK}}{\sqrt{1 + \frac{v_{21xK}^2}{v_{xkp2}^2}}} + \frac{M_{02} \cdot v_{22xK}}{\sqrt{1 + \frac{v_{22xK}^2}{v_{xkp2}^2}}} \quad (174)$$

$$\frac{M_{01}}{\sqrt{1 + \frac{v_{21xH}^2}{v_{xkp2}^2}}} + \frac{M_{02}}{\sqrt{1 + \frac{v_{22xH}^2}{v_{xkp2}^2}}} = \frac{M_{01}}{\sqrt{1 + \frac{v_{21xK}^2}{v_{xkp2}^2}}} + \frac{M_{02}}{\sqrt{1 + \frac{v_{22xK}^2}{v_{xkp2}^2}}} \quad (175)$$

$$\frac{M_{01} \cdot v_{11xH}}{\sqrt{1 + \frac{v_{11xH}^2}{v_{xkp2}^2}}} + \frac{M_{02} \cdot v_{12xH}}{\sqrt{1 + \frac{v_{12xH}^2}{v_{xkp2}^2}}} = \frac{M_{01} \cdot v_{11xK}}{\sqrt{1 + \frac{v_{11xK}^2}{v_{xkp2}^2}}} + \frac{M_{02} \cdot v_{12xK}}{\sqrt{1 + \frac{v_{12xK}^2}{v_{xkp2}^2}}} \quad (176)$$

$$\frac{M_{01}}{\sqrt{1 + \frac{v_{11xH}^2}{v_{xkp2}^2}}} + \frac{M_{02}}{\sqrt{1 + \frac{v_{12xH}^2}{v_{xkp2}^2}}} = \frac{M_{01}}{\sqrt{1 + \frac{v_{11xK}^2}{v_{xkp2}^2}}} + \frac{M_{02}}{\sqrt{1 + \frac{v_{12xK}^2}{v_{xkp2}^2}}} \quad (177)$$

$$\frac{M_{01} \cdot v_{21yH}}{\sqrt{1 + \frac{v_{21yH}^2}{v_{xkp2}^2}}} + \frac{M_{02} \cdot v_{22yH}}{\sqrt{1 + \frac{v_{22yH}^2}{v_{xkp2}^2}}} = \frac{M_{01} \cdot v_{21yK}}{\sqrt{1 + \frac{v_{21yK}^2}{v_{xkp2}^2}}} + \frac{M_{02} \cdot v_{22yK}}{\sqrt{1 + \frac{v_{22yK}^2}{v_{xkp2}^2}}} \quad (178)$$

$$\frac{M_{01}}{\sqrt{1 + \frac{v_{21yH}^2}{v_{xkp2}^2}}} + \frac{M_{02}}{\sqrt{1 + \frac{v_{22yH}^2}{v_{xkp2}^2}}} = \frac{M_{01}}{\sqrt{1 + \frac{v_{21yK}^2}{v_{xkp2}^2}}} + \frac{M_{02}}{\sqrt{1 + \frac{v_{22yK}^2}{v_{xkp2}^2}}} \quad (179)$$

$$\begin{aligned} & \frac{M_{01} \cdot V}{\sqrt{1 + \frac{v_{11yH}^2 + V^2}{v_{xkp2}^2}}} + \frac{M_{02} \cdot V}{\sqrt{1 + \frac{v_{12yH}^2 + V^2}{v_{xkp2}^2}}} = \\ & = \frac{M_{01} \cdot V}{\sqrt{1 + \frac{v_{11yK}^2 + V^2}{v_{xkp2}^2}}} + \frac{M_{02} \cdot V}{\sqrt{1 + \frac{v_{12yK}^2 + V^2}{v_{xkp2}^2}}} \end{aligned} \quad (180)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{M_{01} \cdot v_{11yH}}{\sqrt{1 + \frac{v_{11yH}^2 + V^2}{v_{xkp2}^2}}} + \frac{M_{02} \cdot v_{12yH}}{\sqrt{1 + \frac{v_{12yH}^2 + V^2}{v_{xkp2}^2}}} = \\
& = \frac{M_{01} \cdot v_{11yK}}{\sqrt{1 + \frac{v_{11yK}^2 + V^2}{v_{xkp2}^2}}} + \frac{M_{02} \cdot v_{12yK}}{\sqrt{1 + \frac{v_{12yK}^2 + V^2}{v_{xkp2}^2}}} =
\end{aligned} \tag{181}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{M_{01}}{\sqrt{1 + \frac{v_{11yH}^2 + V^2}{v_{xkp1}^2}}} + \frac{M_{02}}{\sqrt{1 + \frac{v_{12yH}^2 + V^2}{v_{xkp1}^2}}} = \\
& = \frac{M_{01}}{\sqrt{1 + \frac{v_{11yK}^2 + V^2}{v_{xkp1}^2}}} + \frac{M_{02}}{\sqrt{1 + \frac{v_{12yK}^2 + V^2}{v_{xkp1}^2}}} =
\end{aligned} \tag{182}$$

Где, исходя из формул (56) и (137)÷(144):

$$v_{11xH} = \frac{v_{21xH} + V}{1 - \frac{V \cdot v_{21xH}}{v_{xkp2}^2}} \tag{183}$$

$$v_{12xH} = \frac{v_{22xH} + V}{1 - \frac{V \cdot v_{22xH}}{v_{xkp2}^2}} \tag{184}$$

$$v_{11xK} = \frac{v_{21xK} + V}{1 - \frac{V \cdot v_{21xK}}{v_{xkp2}^2}} \tag{185}$$

$$v_{12xK} = \frac{v_{22xK} + V}{1 - \frac{V \cdot v_{22xK}}{v_{xkp2}^2}} \tag{186}$$

$$v_{11yH} = v_{21yH} \cdot \sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{xkp1}^2}} \tag{187}$$

$$v_{11ук} = v_{21ук} \cdot \sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{хкр2}^2}} \quad (188)$$

$$v_{12ун} = v_{22ун} \cdot \sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{хкр2}^2}} \quad (189)$$

$$v_{12ук} = v_{22ук} \cdot \sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{хкр2}^2}} \quad (190)$$

Предположим, что  $M_{o1} = 1$ ,  $M_{o2} = 0,5$ ,  $V / v_{хкр2} = 0,5$ ,  $v_{21хн} / v_{хкр2} = v_{21ун} / v_{хкр2} = 0,9$ ,  $v_{22хн} / v_{хкр2} = v_{22ун} / v_{хкр2} = 0,6$ .

Тогда числовые расчеты дают следующие результаты для примера № 1:

I. В подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$ :

1) тело 1 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 1	До столкновения	скорость $v_{21хн} / v_{хкр2}$	0,9
		масса $M_{21н}$	0,743294146247
		импульс $P_{21н} / v_{хкр2}$	0,668964731622
		кинетическая энергия $E_{к21н} / v_{хкр2}^2$	0,256705853753
	После столкновения	скорость $v_{21хк} / v_{хкр2}$	0,691099932748
		масса $M_{21к}$	0,822656908881
		импульс $P_{21к} / v_{хкр2}$	0,568538134403
		кинетическая энергия $E_{к21к} / v_{хкр2}^2$	0,177343091119



2) тело 2 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 2	До столкновения	скорость $v_{22хн} / v_{хкр2}$	0,6
		масса $M_{22н}$	0,428746462856
		импульс $P_{22н} / v_{хкр2}$	0,257247877714
		кинетическая энергия $E_{к22н} / v_{хкр2}^2$	0,071253537144
	После столкновения	скорость $v_{22хк} / v_{хкр2}$	1,023729712365
		масса $M_{22к}$	0,349383700222
		импульс $P_{22к} / v_{хкр2}$	0,357674474934
		кинетическая энергия $E_{к22к} / v_{хкр2}^2$	0,150616299778

3) система тел 1 и 2 имела:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Система тел 1 и 2	До столкновения	масса ( $M_{21н} + M_{22н}$ )	1,172040609103
		импульс $(P_{21н} + P_{22н}) / v_{хкр2}$	0,926212609336
		кинетическая энергия $E_{к22н} / v_{хкр2}^2$	0,327959390897
	После столкновения	масса ( $M_{21к} + M_{22к}$ )	1,172040609103
		импульс $(P_{21к} + P_{22к}) / v_{хкр2}$	0,926212609336
		кинетическая энергия $(E_{к21к} + E_{к22к}) / v_{хкр2}^2$	0,327959390897

II. В неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$ :

1) тело 1 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 1	До столкновения	скорость $v_{11xn} / v_{xkp2}$	2,545454545455
		масса $M_{11n}$	0,365652372423
		импульс $P_{11n} / v_{xkp2}$	0,93075149344
		кинетическая энергия $E_{k11n} / v_{xkp2}^2$	0,634347627577
	После столкновения	скорость $v_{11xk} / v_{xkp2}$	1,820001331727
		масса $M_{11k}$	0,481548724902
		импульс $P_{11k} / v_{xkp2}$	0,876419320614
		кинетическая энергия $E_{k11k} / v_{xkp2}^2$	0,518451275098

2) тело 2 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 2	До столкновения	скорость $v_{12xn} / v_{xkp2}$	1,571428571429
		масса $M_{12n}$	0,268437746097
		импульс $P_{12n} / v_{xkp2}$	0,421830743866
		кинетическая энергия $E_{k12n} / v_{xkp2}^2$	0,231562253903
	После столкновения	скорость $v_{12xk} / v_{xkp2}$	3,121532492927
		масса $M_{12k}$	0,152541393617
		импульс $P_{12k} / v_{xkp2}$	0,476162916693
		кинетическая энергия $E_{k12k} / v_{xkp2}^2$	0,347458606383

3) система тел 1 и 2 имела:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Система тел 1 и 2	До столкновения	масса ( $M_{11н} + M_{12н}$ )	0,63409011852
		импульс ( $P_{11н} + P_{12н}$ ) / $v_{хкр2}$	1,352582237306
		кинетическая энергия ( $E_{к11н} + E_{к12н}$ ) / $v_{хкр2}^2$	0,86590988148
	После столкновения	масса ( $M_{11к} + M_{12к}$ )	0,63409011852
		импульс ( $P_{11к} + P_{12к}$ ) / $v_{хкр2}$	1,352582237306
		кинетическая энергия ( $E_{к11к} + E_{к12к}$ ) / $v_{хкр2}^2$	0,86590988148

Для примера № 2 числовые расчеты дают следующие результаты:

I. В подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$ :

1) тело 1 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 1	До столкновения	скорость $v_{21н} / v_{хкр2}$	0,9
		масса $M_{21н}$	0,743294146247
		импульс $P_{21н} / v_{хкр2}$	0,668964731622
		кинетическая энергия $E_{к21н} / v_{хкр2}^2$	0,256705853753
	После столкновения	скорость $v_{21к} / v_{хкр2}$	0,691099932748
		масса $M_{21к}$	0,822656908881
		импульс $P_{21к} / v_{хкр2}$	0,568538134403
		кинетическая энергия $E_{к21к} / v_{хкр2}^2$	0,177343091119

2) тело 2 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 2	До столкновения	скорость $v_{22н} / v_{хкр2}$	0,6
		масса $M_{22н}$	0,428746462856
		импульс $P_{22н} / v_{хкр2}$	0,257247877714
		кинетическая энергия $E_{к22н} / v_{хкр2}^2$	0,071253537144
	После столкновения	скорость $v_{22к} / v_{хкр2}$	1,023729712365
		масса $M_{22к}$	0,349383700222
		импульс $P_{22к} / v_{хкр2}$	0,357674474934
		кинетическая энергия $E_{к22к} / v_{хкр2}^2$	0,150616299778

3) система тел 1 и 2 имела:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Система тел 1 и 2	До столкновения	масса ( $M_{21н} + M_{22н}$ )	1,172040609103
		импульс $(P_{21н} + P_{22н}) / v_{хкр2}$	0,926212609336
		кинетическая энергия $E_{к22н} / v_{хкр2}^2$	0,327959390897
	После столкновения	масса ( $M_{21к} + M_{22к}$ )	1,172040609103
		импульс $(P_{21к} + P_{22к}) / v_{хкр2}$	0,926212609336
		кинетическая энергия $(E_{к21к} + E_{к22к}) / v_{хкр2}^2$	0,327959390897

II. В неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$ :

1) тело 1 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 1	До столкновения	проекция скорости $v_{11xH} / v_{xkp2}$	0,5
		проекция скорости $v_{11yH} / v_{xkp2}$	1,006230589875
		масса $M_{11H}$	0,664822495315
		проекция импульса $P_{11xH} / v_{xkp2}$	0,332411247657
		проекция импульса $P_{11yH} / v_{xkp2}$	0,668964731622
		кинетическая энергия $E_{k11H} / v_{xkp2}^2$	0,335177504685
	После столкновения	проекция скорости $v_{11xK} / v_{xkp2}$	0,5
		проекция скорости $v_{11yK} / v_{xkp2}$	0,772673214435
		масса $M_{11K}$	0,735806708167
		проекция импульса $P_{11xK} / v_{xkp2}$	0,367903354084
		проекция импульса $P_{11yK} / v_{xkp2}$	0,568538134403
		кинетическая энергия $E_{k11K} / v_{xkp2}^2$	0,264193291833

2) тело 2 имело:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Тело 2	До столкновения	проекция скорости $v_{12xH} / v_{xkp2}$	0,5
		проекция скорости $v_{12yH} / v_{xkp2}$	0,67082039325
		масса $M_{12H}$	0,383482494424
		проекция импульса $P_{12xH} / v_{xkp2}$	0,191741247212
		проекция импульса $P_{12yH} / v_{xkp2}$	0,257247877714
		кинетическая энергия $E_{k12H} / v_{xkp2}^2$	0,116517505576
	После столкновения	проекция скорости $v_{12xK} / v_{xkp2}$	0,5
		проекция скорости $v_{12yK} / v_{xkp2}$	1,144564613718
		масса $M_{12K}$	0,312498281571
		проекция импульса $P_{12xK} / v_{xkp2}$	0,156249140785
		проекция импульса $P_{12yK} / v_{xkp2}$	0,357674474934
		кинетическая энергия $E_{k12K} / v_{xkp2}^2$	0,187501718429

3) система тел 1 и 2 имела:

Объект	Период времени	Величина	Значение величины
Система тел 1 и 2	До столкновения	масса ( $M_{11H} + M_{12H}$ )	1,048304989738
		проекция импульса $(P_{11xH} + P_{12xH}) / v_{xkp2}$	0,524152494869
		проекция импульса $(P_{11yH} + P_{12yH}) / v_{xkp2}$	0,926212609336
		кинетическая энергия $(E_{k11H} + E_{k12H}) / v_{xkp2}^2$	0,451695010262
	После столкновения	масса ( $M_{11K} + M_{12K}$ )	1,048304989738
		проекция импульса $(P_{11xK} + P_{12xK}) / v_{xkp2}$	0,524152494869
		проекция импульса $(P_{11yK} + P_{12yK}) / v_{xkp2}$	0,926212609336
		кинетическая энергия $(E_{k11K} + E_{k12K}) / v_{xkp2}^2$	0,451695010262

По результатам расчета можно сделать следующий вывод: в примерах № 1 и № 2 в системах отсчета подвижной  $O_2x_2y_2z_2$  и неподвижной  $O_1x_1y_1z_1$  до и после столкновения масса, импульс и кинетическая энергия механической системы тел 1 и 2 остаются неизменными.

Следовательно, формулы (170)÷(173) в случае, когда коэффициент перехода  $0 < \beta < 1$ , удовлетворяют требованиям системы уравнений (128)÷(136).

### 3.1.6. Сравнение формул (150)÷(152) с формулами (171)÷(173).

О зависимостях (150)÷(152):

$$M(V)_> = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{\text{хкр}1}^2}}} \quad (150)$$

$$P(V)_> = \frac{M_0 \cdot V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{\text{хкр}1}^2}}} \quad (151)$$

$$E_k(V)_> = M_0 \cdot v_{\text{хкр}1}^2 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{\text{хкр}1}^2}}} - 1 \right) \quad (152)$$

для массы  $M(V)_>$ , импульса  $P(V)_>$  и кинетической энергии  $E_k(V)_>$  движущегося тела со скоростью  $V$  в случае, когда коэффициент перехода  $\beta > 1$ , можно сказать следующее:

Скорость $V$	Масса $M(V)_>$	Импульс $P(V)_>$	Кинетическая энергия $E_k(V)_>$
$V \ll v_{\text{хкр}1}$	$M_0$	$M_0 \cdot V$	$\frac{M_0 \cdot V^2}{2}$
$V < v_{\text{хкр}1}$	имеет действительное значение	имеет действительное значение	имеет действительное значение
$V = v_{\text{хкр}1}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$V > v_{\text{хкр}1}$	не имеет действительного значения	не имеет действительного значения	не имеет действительного значения

Аналогично о зависимостях (171)÷(173):

$$M(V)_< = \frac{M_0}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} \quad (171)$$

$$P(V)_< = \frac{M_0 \cdot V}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} \quad (172)$$

$$E_k(V)_< = M_0 \cdot v_{\text{хкр}2}^2 \cdot \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} \right) \quad (173)$$

для массы  $M(V)_<$ , импульса  $P(V)_<$  и кинетической энергии  $E_k(V)_<$  движущегося тела со скоростью  $V$  в случае, когда коэффициент перехода  $0 < \beta < 1$ , можно сказать следующее:



Скорость $V$	Масса $M(V)_{<}$	Импульс $P(V)_{<}$	Кинетическая энергия $E_k(V)_{<}$
$V \ll v_{\text{хкр}2}$	$M_0$	$M_0 \cdot V$	$\frac{M_0 \cdot V^2}{2}$
$V < v_{\text{хкр}2}$	имеет действительное значение	имеет действительное значение	имеет действительное значение
$V = v_{\text{хкр}2}$	$\frac{M_0}{\sqrt{2}}$	$\frac{M_0 \cdot v_{\text{хкр}2}}{\sqrt{2}}$	$M_0 \cdot v_{\text{хкр}2}^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$V > v_{\text{хкр}2}$	имеет действительное значение	имеет действительное значение	имеет действительное значение
$V = \infty$	стремится к нулю	$M_0 \cdot v_{\text{хкр}2}$	$M_0 \cdot v_{\text{хкр}2}^2$

Как видно из сравнения, оба диапазона возможного значения коэффициента перехода  $\beta > 1$  и  $0 < \beta < 1$  являются равноценными (оба удовлетворяют граничному условию).

Также опираясь на формулы (97) и (98) можно отметить, что в случае  $\beta > 1$  значения скоростей  $v_{x1}$  и  $v_{x2}$  движения точки соответственно в неподвижной  $O_1x_1y_1z_1$  и подвижной  $O_2x_2y_2z_2$  инерциальных системах отсчета могут находиться только в диапазоне от  $-v_{\text{хкр}1}$  до  $+v_{\text{хкр}1}$ .

В свою очередь в случае  $0 < \beta < 1$  рассматривая формулу (113) можно увидеть, что при значениях  $v_{x2} > 0$  и  $V > 0$  изменение величины скорости  $v_{x2}$  движения точки в подвижной инерциальной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  от  $0$  до  $v_{\text{хкр}2}^2/V$  приведет к изменению величины скорости  $v_{x1}$  движения этой точки в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  от  $V$  до  $+\infty$ , а при изменении величины скорости  $v_{x2}$  движения точки в подвижной инерциальной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  от  $v_{\text{хкр}2}^2/V$  до  $\infty$  величина скорости  $v_{x1}$  движения этой точки в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  изменяется от  $-\infty$  до  $0$  (т.е. в области значений  $v_{x2}$ , равного  $v_{\text{хкр}2}^2/V$ , происходит переход величины значения  $v_{x1}$  от  $+\infty$  до  $-\infty$ ).

### 3.2. Определение значения коэффициента перехода $\beta$

С помощью полученных зависимостей (150) и (171) массы тела от скорости  $V$  постараемся установить, в каком именно диапазоне в действительности находятся значения коэффициента перехода  $\beta$  - в  $\beta > 1$  или в  $0 < \beta < 1$ , т.к. эти диапазоны являются взаимоисключающими в связи с однозначностью зависимости коэффициента перехода  $\beta$  от величины скорости  $V$ .

Попробуем решить эту задачу, рассматривая закон сохранения импульса (закон сохранения механической энергии) в случае, если все или часть тел (материальных точек), составляющих замкнутую механическую систему, движутся нелинейно.

С этой целью обратимся к простейшему примеру.

#### 3.2.1. Пример № 3

Допустим, что имеются две инерциальные системы отсчета, аналогичные системам отсчета, изображенным на рис. 1 - неподвижная  $O_1x_1y_1z_1$  и подвижная  $O_2x_2y_2z_2$ , которая движется со скоростью  $V$  параллельно оси  $O_1x_1$  относительно системы  $O_1x_1y_1z_1$ .

Предположим, что имеется замкнутая механическая система тел, показанная на рис. 5 и состоящая из точечных тел 1 и 2, имеющих равные массы  $M_0$  в состоянии покоя, и нити 3.

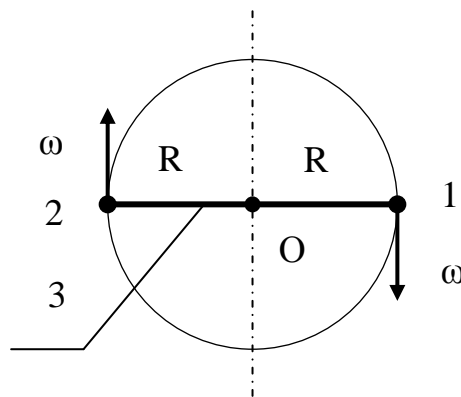


Рис. 5

Тела 1 и 2 соединены абсолютно жесткой (недеформируемой) нитью 3, не имеющей массы.

Тела 1 и 2 вращаются с угловой скоростью  $\omega$  вокруг общего центра масс - точки  $O$ . Расстояние от точечного тела 1 (тела 2) до точки  $O$  равно  $R$ .

Поместим рассматриваемую замкнутую механическую систему тел 1 и 2 с нитью 3 в подвижную систему отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  таким образом, чтобы точка  $O$  была бы неподвижна в этой системе отсчета и совпадала с началом координат  $O_2$ , а вращение тел 1 и 2 вокруг нее происходило бы по часовой стрелке в плоскости  $O_2x_2y_2$ , как показано на рис. 6.

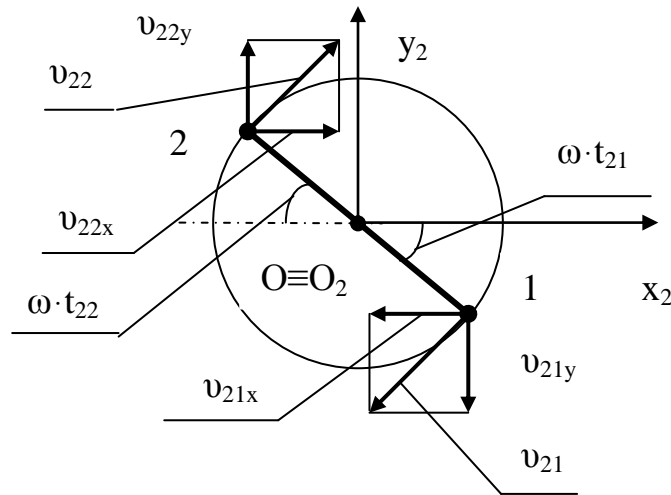


Рис. 6

Также допустим, что в момент начала отсчета времени ( $t_2=0$ ) в системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  тела 1 и 2 находились на оси  $O_2x_2$ , причем, тело 1 имело положительную координату, а тело 2 – отрицательную.

Опираясь на вышесказанное, можно отметить, что в подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  в любой момент времени  $t_2$  тела 1 и 2 будут иметь скорости  $v_{21}$  и  $v_{22}$ , соответственно равные:

$$v_{21} = v_{22} = v = \omega \cdot R \quad (191)$$

При этом проекции  $v_{21x}$  и  $v_{21y}$  скорости тела 1 и проекции  $v_{22x}$  и  $v_{22y}$  скорости тела 2 на оси  $O_2x_2$  и  $O_2y_2$ , соответственно для моментов времени  $t_{21}$  и  $t_{22}$ , будут равны:

$$v_{21x} = - [v \cdot \sin(\omega \cdot t_{21})] \quad (192)$$

$$v_{21y} = - [v \cdot \cos(\omega \cdot t_{21})] \quad (193)$$

$$v_{22x} = v \cdot \sin(\omega \cdot t_{22}) \quad (194)$$

$$v_{22y} = v \cdot \cos(\omega \cdot t_{22}) \quad (195)$$

Связь между координатами  $x_{21}$  и  $y_{21}$  тела 1 в зависимости от времени  $t_{21}$  и связь между координатами  $x_{22}$  и  $y_{22}$  тела 2 в зависимости от времени  $t_{22}$  в подвижной системе отсчета  $\mathbf{O}_2x_2y_2z_2$  можно записать в виде:

$$x_{21} = R \cdot \cos(\omega \cdot t_{21}) \quad (196)$$

$$y_{21} = - [R \cdot \sin(\omega \cdot t_{21})] \quad (197)$$

$$x_{22} = - [R \cdot \cos(\omega \cdot t_{22})] \quad (198)$$

$$y_{22} = R \cdot \sin(\omega \cdot t_{22}) \quad (199)$$

Опираясь на уравнения (34) и (36), можно написать связь между координатами  $x_{11}$  и  $y_{11}$  тела 1 в момент времени  $t_{11}$  в неподвижной системе отсчета  $\mathbf{O}_1x_1y_1z_1$  и координатами  $x_{21}$  и  $y_{21}$  тела 1 в момент времени  $t_{21}$  в подвижной системе отсчета  $\mathbf{O}_2x_2y_2z_2$ :

$$x_{11} = \beta \cdot [x_{21} + (V \cdot t_{21})] \quad (200)$$

$$y_{11} = y_{21} \quad (201)$$

Аналогично, используя уравнения (34) и (36), можно записать связь между координатами  $x_{12}$  и  $y_{12}$  тела 2 в момент времени  $t_{12}$  в неподвижной системе отсчета  $\mathbf{O}_1x_1y_1z_1$  и координатами  $x_{22}$  и  $y_{22}$  тела 2 в момент времени  $t_{22}$  в подвижной системе отсчета  $\mathbf{O}_2x_2y_2z_2$ :

$$x_{12} = \beta \cdot [x_{22} + (V \cdot t_{22})] \quad (202)$$

$$y_{12} = y_{22} \quad (203)$$

С помощью формулы (38) можно написать связь между значениями времен  $t_{11}$ ,  $t_{21}$  и  $t_{12}$ ,  $t_{22}$ :

$$t_{11} = \frac{(\beta^2 - 1) \cdot x_{21}}{\beta \cdot V} + (\beta \cdot t_{21}) \quad (204)$$

$$t_{12} = \frac{(\beta^2 - 1) \cdot x_{22}}{\beta \cdot V} + (\beta \cdot t_{22}) \quad (205)$$

В рассматриваемом примере нас будет интересовать положение тел 1 и 2 в неподвижной системе отсчета  $\mathbf{O}_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1\mathbf{z}_1$  в один и тот же момент времени, т.е. когда:

$$t_{11} = t_{12} \quad (206)$$

Тогда уравнение (206) с учетом формул (196), (198), (200), (202), (204) и (205) примет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{(\beta^2 - 1) \cdot R \cdot \cos(\omega \cdot t_{21})}{\beta \cdot V} + (\beta \cdot t_{21}) = \\ & = \frac{(1 - \beta^2) \cdot R \cdot \cos(\omega \cdot t_{22})}{\beta \cdot V} + (\beta \cdot t_{22}) \end{aligned} \quad (207)$$

В подвижной системе отсчета  $\mathbf{O}_2\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2\mathbf{z}_2$  при выполнении условия (206) представляет интерес положение тел 1 и 2, когда:

$$t_{21} = t_{22} = t_{2p} \quad (208)$$

Подставив условие (208) в уравнение (207) для случая, когда  $(\omega \cdot t_{2p}) < \pi$ , получим:

$$\omega \cdot t_{2p} = \frac{\pi}{2} \quad (209)$$

Т.е. для выполнения условий (206) и (208) тела 1 и 2 в рассматриваемые моменты времени должны находиться на линии, параллельной оси  $\mathbf{O}_2\mathbf{y}_2$  ( $\mathbf{O}_1\mathbf{y}_1$ ).

Также в подвижной системе отсчета  $\mathbf{O}_2\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2\mathbf{z}_2$  при выполнении условия (206) представляет интерес положение тел 1 и 2, когда:

$$t_{21} = 0 \quad (210)$$

Значение времени  $t_{22}$  при выполнении условий (206) и (210) обозначим  $t_{22\tau}$ , для которого уравнение (207) примет вид:

$$t_{22\tau} = \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \cdot [1 + \cos(\omega \cdot t_{22\tau})] \cdot \frac{R}{V} \quad (211)$$

или:

$$\omega \cdot t_{22\tau} = \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \cdot [1 + \cos(\omega \cdot t_{22\tau})] \cdot \frac{v}{V} \quad (212)$$

Как видно из уравнения (212), значение времени  $t_{22T}$  в зависимости от значения коэффициента перехода  $\beta$  может быть:

$$- \quad t_{22T} > 0 \text{ при } \beta > 1 ; \quad (213)$$

$$- \quad t_{22T} < 0 \text{ при } 0 < \beta < 1 ; \quad (214)$$

$$- \quad t_{22T} = 0 \text{ при } \beta = 1 . \quad (215)$$

Теперь можем приступить к проверке выполнения закона сохранения импульса (закона сохранения кинетической энергии).

Рассмотрим два момента времени в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$ .

### 3.2.1.1. Момент времени $t_{1p}$

Согласно условиям (206) и (208) для тел 1 и 2, моменту времени  $t_{1p}$  в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  будет соответствовать момент времени  $t_{2p}$  в подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$ .

Как показано на рис. 7, согласно уравнениям (209), (192)÷(195) в подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  в момент времени  $t_{2p}$  тела 1 и 2 соответственно имеют следующие значения проекций  $v_{21xp}$ ,  $v_{21yp}$  и  $v_{22xp}$ ,  $v_{22yp}$  скоростей своего движения на оси  $O_2x_2$  и  $O_2y_2$ :

$$v_{21xp} = -v \quad (216)$$

$$v_{21yp} = 0 \quad (217)$$

$$v_{22xp} = v \quad (218)$$

$$v_{22yp} = 0 \quad (219)$$

Тогда, исходя из формул (40), (42) и равенств (216)÷(219), в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  в момент времени  $t_{1p}$  тело 1 и тело 2 соответственно будут иметь следующие значения проекций  $v_{11xp}$ ,  $v_{11yp}$  и  $v_{12xp}$ ,  $v_{12yp}$  скоростей своего движения на оси  $O_1x_1$  и  $O_1y_1$ :

$$v_{11xp} = \frac{V - v}{1 - \frac{(\beta^2 - 1) \cdot v}{\beta^2 \cdot V}} \quad (220)$$

$$v_{11yp} = 0 \quad (221)$$

$$v_{12xp} = \frac{V + v}{\frac{(\beta^2 - 1) \cdot v}{\beta^2 \cdot V} + 1} \quad (222)$$

$$v_{12yp} = 0 \quad (223)$$

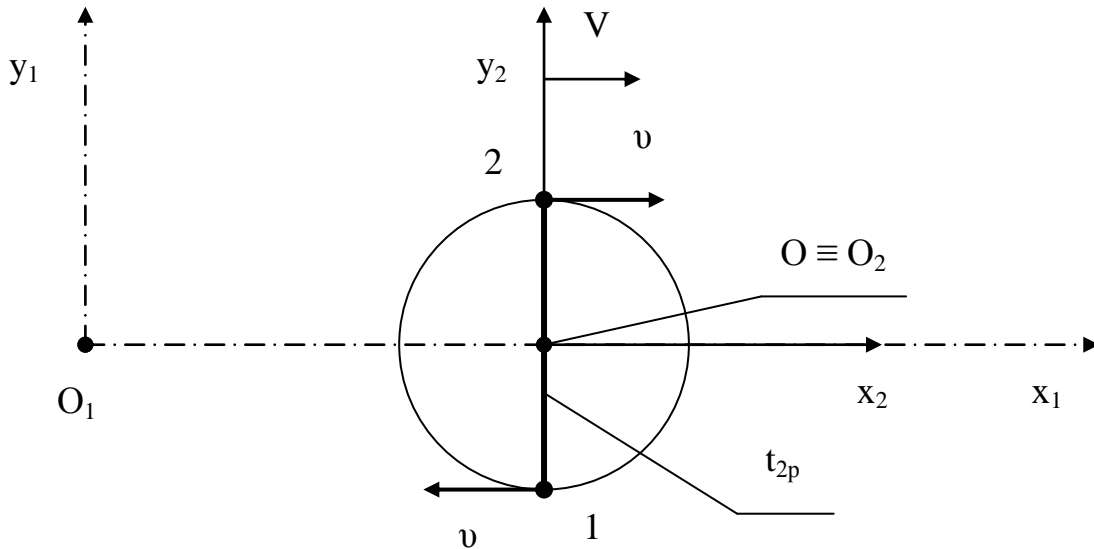


Рис. 7

### 3.2.1.2. Момент времени $t_{1T}$

Согласно условиям (206) и (210) моменту времени  $t_{1T}$  в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  будет соответствовать момент времени  $t_{21} = 0$  для тела 1 и момент времени  $t_{22T}$  для тела 2 в подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$ .

Как показано на рис. 8, в подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  в момент времени  $t_{21} = 0$  тело 1 и в момент времени  $t_{22T}$  тело 2 соответственно имеют следующие значения проекций  $v_{21xT}$ ,  $v_{21yT}$  и  $v_{22xT}$ ,  $v_{22yT}$  скоростей своего движения на оси  $O_2x_2$  и  $O_2y_2$ , причем:

$$v_{21xT} = 0 \quad (224)$$

$$v_{21yT} = -v \quad (225)$$

Тогда, исходя из формул (40), (42) и равенств (224), (225) в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  в момент времени  $t_{1T}$  тело 1 и тело 2 соответственно будут иметь значения проекций  $v_{11xT}$ ,  $v_{11yT}$  и  $v_{12xT}$ ,  $v_{12yT}$

скоростей своего движения на оси  $\mathbf{O}_1\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{O}_1\mathbf{y}_1$ , причем :

$$v_{11xT} = V \quad (226)$$

$$v_{11yT} = -\frac{v}{\beta} \quad (227)$$

$$v_{12xT} = \frac{V + v_{22xT}}{\frac{(\beta^2 - 1) \cdot v_{22xT}}{\beta^2 \cdot V} + 1} \quad (228)$$

$$v_{12yT} = \frac{v_{22yT}}{\frac{(\beta^2 - 1) \cdot v_{22xT}}{\beta \cdot V} + \beta} \quad (229)$$

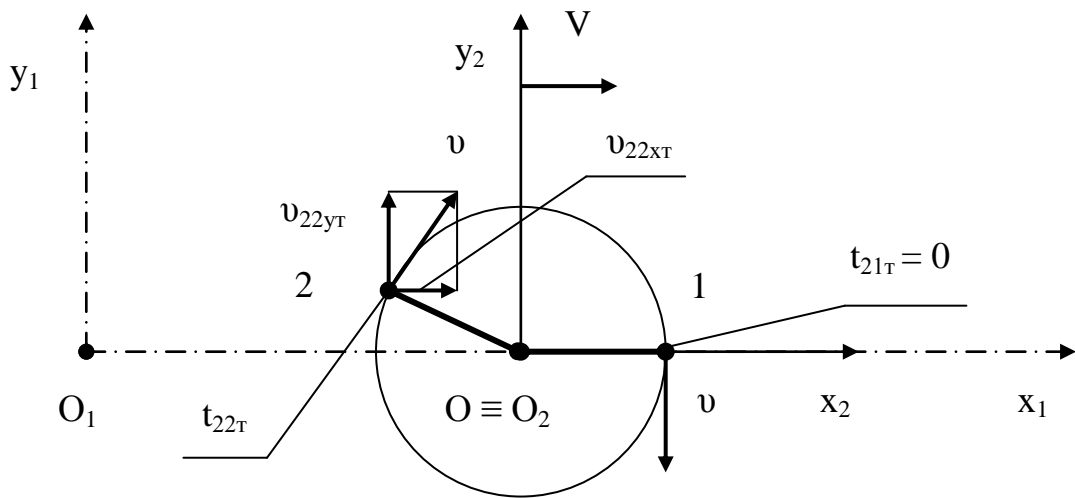


Рис. 8

Учитывая условие (213), что при коэффициенте перехода  $\beta > 1$  время  $t_{22T} > 0$ , можно отметить, что при коэффициенте перехода  $\beta > 1$  проекция скорости  $v_{22yT}$  будет направлена по направлению оси  $\mathbf{O}_2\mathbf{y}_2$ .

Также, исходя из условия (214), утверждающего, что при коэффициенте перехода  $0 < \beta < 1$  время  $t_{22T} < 0$ , можно отметить, что при коэффициенте перехода  $0 < \beta < 1$  проекция скорости  $v_{22yT}$  будет иметь направление, противоположное направлению оси  $\mathbf{O}_2\mathbf{y}_2$ .

Из уравнений (194) и (195) можно получить:

$$v_{22xT}^2 + v_{22yT}^2 = v^2 \quad (230)$$

### 3.2.1.3. Уравнения закона сохранения импульса и закона



### сохранения механической энергии для примера № 3

В неподвижной системе отсчета  $\mathbf{O}_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1\mathbf{z}_1$  в момент времени  $t_{1p}$  тело 1 и тело 2 соответственно будут иметь следующие значения кинетических энергий  $E_{k11p}$  и  $E_{k12p}$  и проекций  $P_{11xp}$ ,  $P_{11yp}$  и  $P_{12xp}$ ,  $P_{12yp}$  импульсов на оси  $\mathbf{O}_1\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{O}_1\mathbf{y}_1$ :

$$P_{11xp} = M_0 \cdot f(V = v_{11xp}) \cdot v_{11xp} \quad (231)$$

$$P_{12xp} = M_0 \cdot f(V = v_{12xp}) \cdot v_{12xp} \quad (232)$$

$$P_{11yp} = 0 \quad (233)$$

$$P_{12yp} = 0 \quad (234)$$

$$E_{k11p} = M_0 \cdot \int_0^{v_{11xp}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \quad (235)$$

$$E_{k12p} = M_0 \cdot \int_0^{v_{12xp}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \quad (236)$$

В неподвижной системе отсчета  $\mathbf{O}_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1\mathbf{z}_1$  в момент времени  $t_{1T}$  тело 1 и тело 2 соответственно будут иметь следующие значения кинетических энергий  $E_{k11T}$  и  $E_{k12T}$  и проекций  $P_{11xT}$ ,  $P_{11yT}$  и  $P_{12xT}$ ,  $P_{12yT}$  импульсов на оси  $\mathbf{O}_1\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{O}_1\mathbf{y}_1$ :

$$P_{11xT} = M_0 \cdot f \left[ V = \sqrt{v_{11xT}^2 + v_{11yT}^2} \right] \cdot v_{11xT} \quad (237)$$

$$P_{12xT} = M_0 \cdot f \left[ V = \sqrt{v_{12xT}^2 + v_{12yT}^2} \right] \cdot v_{12xT} \quad (238)$$

$$P_{11yT} = M_0 \cdot f \left[ V = \sqrt{v_{11xT}^2 + v_{11yT}^2} \right] \cdot v_{11yT} \quad (239)$$

$$P_{12yT} = M_0 \cdot f \left[ V = \sqrt{v_{12xT}^2 + v_{12yT}^2} \right] \cdot v_{12yT} \quad (240)$$

$$E_{k11T} = M_0 \cdot \int_0^{\sqrt{v_{11xT}^2 + v_{11yT}^2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \quad (241)$$

$$E_{k12T} = M_0 \cdot \int_0^{\sqrt{v_{12xT}^2 + v_{12yT}^2}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \quad (242)$$

В связи с тем, что механическая система тел 1 и 2 (и нити 3) является замкнутой, закон сохранения импульса позволяет записать для моментов времени  $t_{1p}$  и  $t_{1T}$  следующие уравнения:

$$P_{11xp} + P_{12xp} = P_{11xT} + P_{12xT}$$

или

$$\begin{aligned} & \{M_0 \cdot f(V = v_{11xp}) \cdot v_{11xp}\} + \{M_0 \cdot f(V = v_{12xp}) \cdot v_{12xp}\} = \\ & = \{M_0 \cdot f[V = \sqrt{v_{11xT}^2 + v_{11yT}^2}] \cdot v_{11xT}\} + \\ & + \{M_0 \cdot f[V = \sqrt{v_{12xT}^2 + v_{12yT}^2}] \cdot v_{12xT}\} \end{aligned} \quad (243)$$

$$P_{11yp} + P_{12yp} = P_{11yT} + P_{12yT}$$

или

$$\begin{aligned} 0 & = \{M_0 \cdot f[V = \sqrt{v_{11xT}^2 + v_{11yT}^2}] \cdot v_{11yT}\} + \\ & + \{M_0 \cdot f[V = \sqrt{v_{12xT}^2 + v_{12yT}^2}] \cdot v_{12yT}\} \end{aligned} \quad (244)$$

Также в связи с тем, что механическая система тел 1 и 2 (и нити 3) является замкнутой и потенциальные энергии тел 1 и 2 не изменяются и являются постоянными величинами, закон сохранения механической энергии позволяет записать для моментов времени  $t_{1p}$  и  $t_{1T}$  следующее уравнение:

$$E_{k11p} + E_{k12p} = E_{k11T} + E_{k12T}$$

или

$$\langle M_0 \cdot \int_0^{v_{11xp}} \{[f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2]\} \cdot dV \rangle +$$

$$\begin{aligned}
& + \langle M_0 \cdot \int_0^{v_{12xp}} \{ [f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2] \} \cdot dV \rangle = \\
& = \langle M_0 \cdot \int_0^{\sqrt{v_{11xт}^2 + v_{11yт}^2}} \{ [f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2] \} \cdot dV \rangle + \\
& + \langle M_0 \cdot \int_0^{\sqrt{v_{12xт}^2 + v_{12yт}^2}} \{ [f(V) \cdot V] + [f'(V) \cdot V^2] \} \cdot dV \rangle \quad (245)
\end{aligned}$$

### 3.2.1.4. Определение условий выполнения закона сохранения импульса для примера № 3 при коэффициенте перехода $\beta \geq 1$

В случае, если коэффициент перехода  $\beta \geq 1$ , то значения коэффициента перехода  $\beta$  и функции  $f(V)$  определяются:

$$\beta_{>}^2 = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{v_{хкр1}^2}} \quad (59)$$

$$f(V)_{>} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{хкр1}^2}}} \quad (149)$$

Тогда с учетом формулы (149) уравнения (243) и (244) примут вид:

$$\frac{M_0 \cdot v_{11xp}}{\sqrt{1 - \frac{v_{11xp}^2}{v_{хкр1}^2}}} + \frac{M_0 \cdot v_{12xp}}{\sqrt{1 - \frac{v_{12xp}^2}{v_{хкр1}^2}}} = \frac{M_0 \cdot v_{11xт}}{\sqrt{1 - \frac{v_{11xт}^2 + v_{11yт}^2}{v_{хкр1}^2}}} + \frac{M_0 \cdot v_{12xт}}{\sqrt{1 - \frac{v_{12xт}^2 + v_{12yт}^2}{v_{хкр1}^2}}} \quad (246)$$

$$0 = \frac{M_0 \cdot v_{11yт}}{\sqrt{1 - \frac{v_{11xт}^2 + v_{11yт}^2}{v_{хкр1}^2}}} + \frac{M_0 \cdot v_{12yт}}{\sqrt{1 - \frac{v_{12xт}^2 + v_{12yт}^2}{v_{хкр1}^2}}} \quad (247)$$

Формулы (220)÷(223) и (226)÷(229) с учетом формулы (59) можно записать:

$$v_{11xp} = \frac{V - v}{1 - \frac{V \cdot v}{v_{xkp1}^2}} \quad (248)$$

$$v_{12xp} = \frac{V + v}{1 + \frac{V \cdot v}{v_{xkp1}^2}} \quad (249)$$

$$v_{11xt} = V \quad (226)$$

$$v_{11yt} = - \left( v \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{xkp1}^2}} \right) \quad (250)$$

$$v_{12xt} = \frac{V + v_{22xt}}{1 + \frac{V \cdot v_{22xt}}{v_{xkp1}^2}} \quad (251)$$

$$v_{12yt} = \frac{v_{22yt} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{xkp1}^2}}}{1 + \frac{V \cdot v_{22xt}}{v_{xkp1}^2}} \quad (252)$$

Вставив проекции скоростей  $v_{11xp}$ ,  $v_{12xp}$ ,  $v_{11xt}$ ,  $v_{11yt}$ ,  $v_{12xt}$  и  $v_{12yt}$  из формул (226), (248)÷(252) в уравнения (246) и (247) и используя формулу (230), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{M_0 \cdot (V - v)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_{xkp1}^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{xkp1}^2}}} + \frac{M_0 \cdot (V + v)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_{xkp1}^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{xkp1}^2}}} = \\ & = \frac{M_0 \cdot V}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_{xkp1}^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{xkp1}^2}}} + \frac{M_0 \cdot (V + v_{22xt})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_{xkp1}^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{xkp1}^2}}} \end{aligned} \quad (253)$$

$$0 = - \frac{M_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_{xkp1}^2}}} + \frac{M_0 \cdot v_{22yt}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_{xkp1}^2}}} \quad (254)$$

или:

$$V - v + V + v = V + V + v_{22xT}$$

$$0 = -v + v_{22yT}$$

Из уравнений (253) и (254) получаем необходимые условия (значения проекций скоростей  $v_{22xT}$  и  $v_{22yT}$ ), при которых в примере № 3 при коэффициенте перехода  $\beta \geq 1$  будет выполняться закон сохранения импульса в неподвижной инерциальной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$ :

$$v_{22xT} = 0 \quad (255)$$

$$v_{22yT} = v \quad (256)$$

Из равенств (255) и (256) следует, что величины проекций скоростей  $v_{22xT}$  и  $v_{22yT}$  не зависят от величины скорости  $V$  (и, следовательно, не зависят от величины коэффициента перехода  $\beta$ ).

Подставив условия (255) и (256) в уравнения (194) и (195), получим:

$$t_{22T} = t_{21T} = 0 \quad (257)$$

А подставив уравнение (257) в формулу (212):

$$\omega \cdot 0 = \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \cdot [1 + 1] \cdot \frac{v}{V} \quad (258)$$

будем иметь еще одно условие выполнения закона сохранения импульса в неподвижной инерциальной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  для примера № 3:

$$\beta = 1 \quad (259)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что в замкнутой механической системе тел, рассматриваемой в примере № 3, для значений коэффициента перехода  $\beta > 1$  закон сохранения импульса не выполняется.

### **3.2.1.5. Определение условий выполнения закона сохранения механической энергии для примера № 3 при коэффициенте перехода $\beta \geq 1$**

В дополнение к условиям выполнения закона сохранения импульса постараемся определить условия выполнения закона сохранения механической энергии.

С учетом формулы (149) уравнение (245) примет вид:

$$\begin{aligned}
& \left[ M_0 \cdot v_{\text{хкр1}}^2 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{11\text{хр}}^2}{v_{\text{хкр1}}^2}}} - 1 \right) \right] + \left[ M_0 \cdot v_{\text{хкр1}}^2 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{12\text{хр}}^2}{v_{\text{хкр1}}^2}}} - 1 \right) \right] = \\
& = \left[ M_0 \cdot v_{\text{хкр1}}^2 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{11\text{хт}}^2 + v_{11\text{ут}}^2}{v_{\text{хкр1}}^2}}} - 1 \right) \right] + \\
& + \left[ M_0 \cdot v_{\text{хкр1}}^2 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{12\text{хт}}^2 + v_{12\text{ут}}^2}{v_{\text{хкр1}}^2}}} - 1 \right) \right] \quad (260)
\end{aligned}$$

Вставив проекции скоростей  $v_{11\text{хр}}$ ,  $v_{12\text{хр}}$ ,  $v_{11\text{хт}}$ ,  $v_{11\text{ут}}$ ,  $v_{12\text{хт}}$  и  $v_{12\text{ут}}$  из формул (226), (248)÷(252) в уравнение (260), с учетом формулы (230) получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{\left(1 - \frac{v \cdot V}{v_{\text{хкр1}}^2}\right) \cdot v_{\text{хкр1}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{V^2}{v_{\text{хкр1}}^2}\right) \cdot (v_{\text{хкр1}}^2 - v^2)}} + \frac{\left(1 + \frac{v \cdot V}{v_{\text{хкр1}}^2}\right) \cdot v_{\text{хкр1}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{V^2}{v_{\text{хкр1}}^2}\right) \cdot (v_{\text{хкр1}}^2 - v^2)}} = \\
& = \frac{v_{\text{хкр1}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{V^2}{v_{\text{хкр1}}^2}\right) \cdot (v_{\text{хкр1}}^2 - v^2)}} + \frac{\left(1 + \frac{v_{22\text{хт}} \cdot V}{v_{\text{хкр1}}^2}\right) \cdot v_{\text{хкр1}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{V^2}{v_{\text{хкр1}}^2}\right) \cdot (v_{\text{хкр1}}^2 - v^2)}} \quad (261)
\end{aligned}$$

Или:

$$1 - \frac{v \cdot V}{v_{\text{хкр1}}^2} + 1 + \frac{v \cdot V}{v_{\text{хкр1}}^2} = 1 + 1 + \frac{v_{22\text{хт}} \cdot V}{v_{\text{хкр1}}^2}$$

Из уравнения (261) получаем необходимое условие (значение проекции скорости  $v_{22\text{хт}}$ ), при котором в примере № 3 при коэффициенте перехода  $\beta \geq 1$  в неподвижной инерциальной системе отсчета  $\mathbf{O}_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1\mathbf{z}_1$  будет

выполняться закон сохранения механической энергии, предполагая, что потенциальная энергия системы тел 1 и 2 не меняется:

$$v_{22xT} = 0 \quad (255)$$

Тогда, исходя из формулы (230), получим:

$$v_{22yT} = v \quad (256)$$

Это позволяет сделать вывод: условием для выполнения закона сохранения механической энергии (как и условием для выполнения закона сохранения импульса) в неподвижной инерциальной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  для примера № 3 является:

$$\beta = 1 \quad (259)$$

Таким образом, получается, что в замкнутой механической системе тел, рассматриваемой в примере № 3, для значений коэффициента перехода  $\beta > 1$  закон сохранения механической энергии не выполняется.

Аналогично может быть доказано, что в замкнутой механической системе тел, рассматриваемой в примере № 3, для значений коэффициента перехода  $\beta > 1$  закон сохранения момента импульса не будет выполняться.

Подтвердим вышесказанное числовыми расчетами.

### 3.2.1.6. Цифровой расчет для примера № 3 при коэффициенте перехода $\beta > 1$

Предположим, что:

$$V / v_{xkp1} = 0,9, v / v_{xkp1} = 0,6 .$$

Уравнение (212) с учетом формулы (59) можно записать в виде:

$$\omega \cdot t_{22T} = \frac{v \cdot V \cdot [1 + \cos(\omega \cdot t_{22T})]}{v_{xkp1}^2} \quad (262)$$

Тогда получим:

$\omega \cdot t_{22T} = 0,8828669738$ , проекции  $v_{22xT} / v_{xkp1} = 0,4635374427$  и  $v_{22yT} / v_{xkp1} = 0,3809633042$  скорости движения тела 2 в подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$ .

В неподвижной инерциальной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$ :

а) в момент времени  $t_{1p}$ :

Момент времени	Объект	Величина	Значение величины
$t_{1p}$	Тело 1	проекция импульса на ось $O_1x_1$ $K_{11xp} / (M_o \cdot v_{xkp1})$	0,860309002
		кинетическая энергия $E_{k11p} / (M_o \cdot v_{xkp1}^2)$	0,31914047
	Тело 2	проекция импульса на ось $O_1x_1$ $K_{12xp} / (M_o \cdot v_{xkp1})$	4,30154501
		кинетическая энергия $E_{k12p} / (M_o \cdot v_{xkp1}^2)$	3,416252877
	Система тел 1 и 2	проекция импульса на ось $O_1x_1$ $K_{12x\Sigma p} / (M_o \cdot v_{xkp1})$	5,161854012
		проекция импульса на ось $O_1 y_1$ $K_{12y\Sigma p} / (M_o \cdot v_{xkp1})$	0
		кинетическая энергия $E_{kp} / (M_o \cdot v_{xkp1}^2)$	3,735393347



б) в момент времени  $t_{1T}$ :

Момент времени	Объект	Величина	Значение величины
$t_{1T}$	Тело 1	проекция импульса на ось $O_1x_1$ $K_{11xT} / (M_0 \cdot v_{xkp1})$	2,580927006
		проекция импульса на ось $O_1y_1$ $K_{11yT} / (M_0 \cdot v_{xkp1})$	- 0,75
		кинетическая энергия $E_{K11T} / (M_0 \cdot v_{xkp1}^2)$	1,092373316
	Тело 2	проекция импульса на ось $O_1x_1$ $K_{12xT} / (M_0 \cdot v_{xkp1})$	3,9102117884
		проекция импульса на ось $O_1y_1$ $K_{12yT} / (M_0 \cdot v_{xkp1})$	0,4762041303
		кинетическая энергия $E_{K12T} / (M_0 \cdot v_{xkp1}^2)$	3,064052977
	Система тел 1 и 2	проекция импульса на ось $O_1x_1$ $K_{12x\Sigma T} / (M_0 \cdot v_{xkp1})$	6,491138794
		проекция импульса на ось $O_1y_1$ $K_{12y\Sigma T} / (M_0 \cdot v_{xkp1})$	- 0,2737958696
		кинетическая энергия $E_{KT} / (M_0 \cdot v_{xkp1}^2)$	4,931749651

Закон сохранения импульса не выполняется, т.к.:  
5,161854012 # 6,491138794 и - 0,2737958696 # 0 .

Закон сохранения кинетической энергии не выполняется, т.к.:  
3,735393347 # 4,931749651.

### 3.2.1.7. Определение условий выполнения закона сохранения импульса для примера № 3 при коэффициенте перехода $0 < \beta \leq 1$

В случае, если коэффициент перехода  $0 < \beta \leq 1$ , то значения

коэффициента перехода  $\beta$  и функции  $\mathbf{f}(\mathbf{V})$  определяются:

$$\beta_{<}^2 = \frac{1}{1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}} \quad (60)$$

$$f(V)_{<} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} \quad (170)$$

Тогда, с учетом формулы (170) уравнения (243) и (244) примут вид:

$$\frac{M_0 \cdot v_{11\text{xp}}}{\sqrt{1 + \frac{v_{11\text{xp}}^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} + \frac{M_0 \cdot v_{12\text{xp}}}{\sqrt{1 + \frac{v_{12\text{xp}}^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} = \frac{M_0 \cdot v_{11\text{xt}}}{\sqrt{1 + \frac{v_{11\text{xt}}^2 + v_{11\text{yt}}^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} + \frac{M_0 \cdot v_{12\text{xt}}}{\sqrt{1 + \frac{v_{12\text{xt}}^2 + v_{12\text{yt}}^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} \quad (263)$$

$$0 = \frac{M_0 \cdot v_{11\text{yt}}}{\sqrt{1 + \frac{v_{11\text{xt}}^2 + v_{11\text{yt}}^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} + \frac{M_0 \cdot v_{12\text{yt}}}{\sqrt{1 + \frac{v_{12\text{xt}}^2 + v_{12\text{yt}}^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} \quad (264)$$

Формулы (220)÷(223) и (226)÷(229) с учетом формулы (60) можно записать:

$$v_{11\text{xp}} = \frac{V - v}{1 + \frac{V \cdot v}{v_{\text{хкр}2}^2}} \quad (265)$$

$$v_{12\text{xp}} = \frac{V + v}{1 - \frac{V \cdot v}{v_{\text{хкр}2}^2}} \quad (266)$$

$$v_{11\text{xt}} = V \quad (226)$$

$$v_{11\text{yt}} = - \left( v \cdot \sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}} \right) \quad (267)$$

$$v_{12\text{xt}} = \frac{V + v_{22\text{xt}}}{1 - \frac{V \cdot v_{22\text{xt}}}{v_{\text{хкр}2}^2}} \quad (268)$$

$$v_{12_{yt}} = \frac{v_{22_{yt}} \cdot \sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{кр}2}^2}}}{1 - \frac{V \cdot v_{22_{xt}}}{v_{\text{кр}2}^2}} \quad (269)$$

Вставив проекции скоростей  $v_{11_{xp}}$ ,  $v_{12_{xp}}$ ,  $v_{11_{xt}}$ ,  $v_{11_{yt}}$ ,  $v_{12_{xt}}$  и  $v_{12_{yt}}$  из формул (226), (265)÷(269) в уравнения (263) и (264) и используя формулу (230), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{M_0 \cdot (V - v)}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{v_{\text{кр}2}^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{кр}2}^2}}} + \frac{M_0 \cdot (V + v)}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{v_{\text{кр}2}^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{кр}2}^2}}} = \\ & = \frac{M_0 \cdot V}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{v_{\text{кр}2}^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{кр}2}^2}}} + \frac{M_0 \cdot (V + v_{22_{xt}})}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{v_{\text{кр}2}^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{кр}2}^2}}} \quad (270) \end{aligned}$$

$$0 = - \frac{M_0 \cdot v}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{v_{\text{кр}2}^2}}} + \frac{M_0 \cdot v_{22_{yt}}}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{v_{\text{кр}2}^2}}} \quad (271)$$

или:

$$V - v + V + v = V + V + v_{22_{xt}}$$

$$0 = -v + v_{22_{yt}}$$

Из уравнений (270) и (271) получаем необходимые условия (значения  $v_{22_{xt}}$  и  $v_{22_{yt}}$ ), при которых в примере № 3 при коэффициенте перехода  $0 < \beta \leq 1$  будет выполняться закон сохранения импульса в неподвижной инерциальной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$ :

$$v_{22_{xt}} = 0 \quad (255)$$

$$v_{22_{yt}} = v \quad (256)$$

Из равенств (255) и (256) следует, что величины проекций скоростей  $v_{22_{xt}}$  и  $v_{22_{yt}}$  не зависят от величины скорости  $V$  (и, следовательно, не зависят от величины коэффициента перехода  $\beta$ ).

Подставив условия (255) и (256) в уравнения (194) и (195), получим:

$$t_{22T} = t_{21T} = 0 \quad (257)$$

А подставив уравнение (257) в формулу (212):

$$\omega \cdot 0 = \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \cdot [1 + 1] \cdot \frac{v}{V} \quad (258)$$

будем иметь еще одно условие выполнения закона сохранения импульса в неподвижной инерциальной системе отсчета  $\mathbf{O}_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1\mathbf{z}_1$  для примера № 3:

$$\beta = 1 \quad (259)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что в замкнутой механической системе тел, рассматриваемой в примере № 3, для значений коэффициента перехода  $0 < \beta < 1$  закон сохранения импульса не выполняется.

### 3.2.1.8. Определение условий выполнения закона сохранения механической энергии для примера № 3 при коэффициенте перехода $0 < \beta < 1$

В дополнение к условиям выполнения закона сохранения импульса постараемся определить условия выполнения закона сохранения механической энергии.

С учетом формулы (170) уравнение (245) примет вид:

$$\begin{aligned} & \left[ M_0 \cdot v_{\text{хкр}2}^2 \cdot \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_{11\text{хр}}^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} \right) \right] + \left[ M_0 \cdot v_{\text{хкр}2}^2 \cdot \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_{12\text{хр}}^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} \right) \right] = \\ & = \left[ M_0 \cdot v_{\text{хкр}2}^2 \cdot \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_{11\text{хт}}^2 + v_{11\text{ут}}^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} \right) \right] + \end{aligned}$$

$$+ \left[ M_0 \cdot v_{\text{хкр}2}^2 \cdot \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_{12\text{хт}}^2 + v_{12\text{ут}}^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} \right) \right] \quad (272)$$

Вставив проекции скоростей  $\mathbf{v}_{11\text{хр}}$ ,  $\mathbf{v}_{12\text{хр}}$ ,  $\mathbf{v}_{11\text{хт}}$ ,  $\mathbf{v}_{11\text{ут}}$ ,  $\mathbf{v}_{12\text{хт}}$  и  $\mathbf{v}_{12\text{ут}}$  из формул (226), (265)–(269) в уравнение (272), с учетом формулы (230), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\left(1 + \frac{v \cdot V}{v_{\text{хкр}2}^2}\right) \cdot v_{\text{хкр}2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}\right) \cdot (v_{\text{хкр}2}^2 + v^2)}} + \frac{\left(1 - \frac{v \cdot V}{v_{\text{хкр}1}^2}\right) \cdot v_{\text{хкр}2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}\right) \cdot (v_{\text{хкр}2}^2 + v^2)}} = \\ & = \frac{v_{\text{хкр}2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}\right) \cdot (v_{\text{хкр}2}^2 + v^2)}} + \frac{\left(1 - \frac{v_{22\text{хт}} \cdot V}{v_{\text{хкр}2}^2}\right) \cdot v_{\text{хкр}2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}\right) \cdot (v_{\text{хкр}2}^2 + v^2)}} \quad (273) \end{aligned}$$

Или:

$$1 + \frac{v \cdot V}{v_{\text{хкр}2}^2} + 1 - \frac{v \cdot V}{v_{\text{хкр}2}^2} = 1 + 1 - \frac{v_{22\text{хт}} \cdot V}{v_{\text{хкр}2}^2}$$

Из уравнения (273) получаем необходимое условие (значение проекции скорости  $\mathbf{v}_{22\text{хт}}$ ), при котором в примере № 3 при коэффициенте перехода  $0 < \beta < 1$  в неподвижной инерциальной системе отсчета  $\mathbf{O}_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1\mathbf{z}_1$  будет выполняться закон сохранения механической энергии, предполагая, что потенциальная энергия системы тел 1 и 2 не меняется:

$$v_{22\text{хт}} = 0 \quad (255)$$

Тогда, исходя из формулы (230), получим:

$$v_{22\text{ут}} = v \quad (256)$$

Это позволяет сделать вывод: условием для выполнения закона сохранения механической энергии (как и условием для выполнения закона сохранения импульса) в неподвижной инерциальной системе отсчета

$O_1x_1y_1z_1$  для примера № 3 является:

$$\beta = 1 \quad (259)$$

Таким образом, получается, что в замкнутой механической системе тел, рассматриваемой в примере № 3, для значений коэффициента перехода  $0 < \beta < 1$  закон сохранения механической энергии не выполняется.

Аналогично может быть доказано, что в замкнутой механической системе тел, рассматриваемой в примере № 3, для значений коэффициента перехода  $0 < \beta < 1$  закон сохранения момента импульса не будет выполняться.

Подтвердим вышесказанное числовыми расчетами.

### 3.2.1.9. Цифровой расчет для примера № 3 при коэффициенте перехода $0 < \beta < 1$

Предположим, что  $V / v_{\text{хкр}2} = 0,9$ ,  $v / v_{\text{хкр}2} = 0,6$ .

Уравнение (212) с учетом формулы (60) можно записать в виде:

$$\omega \cdot t_{22T} = - \frac{v \cdot V \cdot [1 + \cos(\omega \cdot t_{22T})]}{v_{\text{хкр}2}^2} \quad (274)$$

Тогда получим:

$\omega \cdot t_{22T} = - 0,8828669738$ , проекции  $v_{22xT} / v_{\text{хкр}2} = - 0,4635374427$  и  $v_{22yT} / v_{\text{хкр}2} = 0,3809633042$  скорости движения тела 2 в подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$ .

В неподвижной инерциальной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$ :

а) в момент времени  $t_{1p}$ :

Момент времени	Объект	Величина	Значение величины
$t_{1p}$	Тело 1	проекция импульса на ось $O_1x_1$ $K_{11xp} / (M_o \cdot v_{xkp2})$	0,1912108416
		кинетическая энергия $E_{k11p} / (M_o \cdot v_{xkp2}^2)$	0,018451013
	Тело 2	проекция импульса на ось $O_1x_1$ $K_{12xp} / (M_o \cdot v_{xkp2})$	0,9560542082
		кинетическая энергия $E_{k12p} / (M_o \cdot v_{xkp2}^2)$	0,706810043
	Система тел 1 и 2	проекция импульса на ось $O_1x_1$ $K_{12x\Sigma p} / (M_o \cdot v_{xkp2})$	1,1472650498
		проекция импульса на ось $O_1y_1$ $K_{12y\Sigma p} / (M_o \cdot v_{xkp2})$	0
		кинетическая энергия $E_{kp} / (M_o \cdot v_{xkp2}^2)$	0,725261056

б) в момент времени  $t_{1T}$ :

Момент времени	Объект	Величина	Значение величины
$t_{1T}$	Тело 1	проекция импульса на ось $O_1x_1$ $K_{11xT} / (M_0 \cdot v_{xkp2})$	0,5736325249
		проекция импульса на ось $O_1y_1$ $K_{11yT} / (M_0 \cdot v_{xkp2})$	- 0,5144957554
		кинетическая энергия $E_{K11T} / (M_0 \cdot v_{xkp2}^2)$	0,362630528
	Тело 2	проекция импульса на ось $O_1x_1$ $K_{12xT} / (M_0 \cdot v_{xkp2})$	0,2781879097
		проекция импульса на ось $O_1y_1$ $K_{12yT} / (M_0 \cdot v_{xkp2})$	0,3266733383
		кинетическая энергия $E_{K12T} / (M_0 \cdot v_{xkp2}^2)$	0,628530682
	Система тел 1 и 2	проекция импульса на ось $O_1x_1$ $K_{12x\Sigma T} / (M_0 \cdot v_{xkp2})$	0,8518204346
		проекция импульса на ось $O_1y_1$ $K_{12y\Sigma T} / (M_0 \cdot v_{xkp2})$	- 0,187822417
		кинетическая энергия $E_{KT} / (M_0 \cdot v_{xkp2}^2)$	0,991161209

Закон сохранения импульса не выполняется, т.к.:  
1,1472650498 # 0,8518204346 и - 0,187822417 # 0.

Закон сохранения кинетической энергии не выполняется, т.к.:  
0,725261056 # 0,991161209.

К результатам, полученным при рассмотрении примера № 3, приведет и рассмотрение системы тел, изображенной на рис. 9, в которой тела 1 и 2, описанные в примере № 3, удерживаются не жесткой нитью, а силой притяжения тела 3 (точечного), которое будет находиться в центре  $O$ .



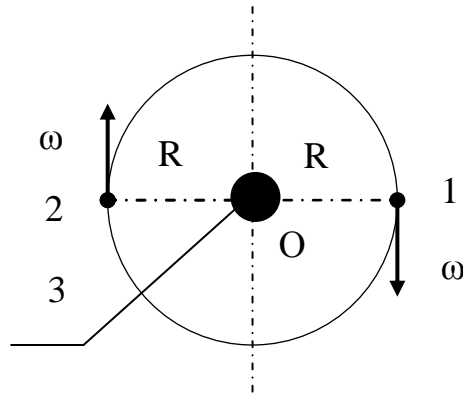


Рис. 9

### 3.2.1.10. Выводы

В результате рассмотрения примера № 3 было получено, что при значениях коэффициента перехода  $\beta$ , находящихся в диапазонах  $\beta > 1$  и  $0 < \beta < 1$ , в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$ :

- импульс замкнутой механической системы тел 1 и 2 (и нити 3) в момент времени, когда тела 1 и 2 находятся на линии, параллельной оси  $O_1y_1$ , не равен импульсу этой системы тел 1 и 2 (и нити 3) в любой другой момент времени, когда тела 1 и 2 не находятся на линии, параллельной оси  $O_1y_1$ , т.е. в неподвижной (инерциальной) системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  замкнутая механическая система тел 1 и 2 (и нити 3) будет иметь меняющийся во времени импульс, что является нарушением закона сохранения импульса замкнутой механической системы тел;

- кинетическая энергия (при неизменности потенциальной энергии системы тел 1 и 2) замкнутой механической системы тел 1 и 2 (и нити 3) в момент времени, когда тела 1 и 2 находятся на линии, параллельной оси  $O_1y_1$ , не равна кинетической энергии этой системы тел 1 и 2 (и нити 3) в любой другой момент времени, когда тела 1 и 2 не находятся на линии, параллельной оси  $O_1y_1$ , т.е. в неподвижной (инерциальной) системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  замкнутая механическая система тел 1 и 2 (и нити 3) будет иметь меняющуюся во времени кинетическую энергию, что при неизменности величины потенциальной энергии системы тел 1 и 2

**является нарушением закона сохранения механической энергии замкнутой механической системы тел.**

Аналогично может быть доказано, что при рассмотрении примера № 3 получим, что при значениях коэффициента перехода  $\beta$ , находящихся в диапазонах  $\beta > 1$  и  $0 < \beta < 1$ , в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  момент импульса замкнутой механической системы тел 1 и 2 (и нити 3) в момент времени, когда тела 1 и 2 находятся на линии, параллельной оси  $O_1y_1$ , не равен моменту импульса этой системы тел 1 и 2 (и нити 3) в любой другой момент времени, когда тела 1 и 2 не находятся на линии, параллельной оси  $O_1y_1$ , т.е. **в неподвижной (инерциальной) системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  замкнутая механическая система тел 1 и 2 (и нити 3) будет иметь меняющийся во времени момент импульса, что является нарушением закона сохранения момента импульса замкнутой механической системы тел.**

Изменение во времени значений импульса, кинетической энергии (при неизменности потенциальной энергии системы тел 1 и 2 (и нити 3)), момента импульса замкнутой механической системы тел 1 и 2 (и нити 3) в примере № 3 свидетельствует о том, что при значениях коэффициента перехода  $\beta$ , находящихся в диапазонах  $\beta > 1$  и  $0 < \beta < 1$ , имеет место невыполнение законов сохранения импульса, механической энергии и момента импульса.

Исходя из того, что законы сохранения импульса, механической энергии (при неизменности потенциальной энергии системы) и момента импульса замкнутой механической системы связаны с симметрией пространства и времени (однородностью и изотропностью пространства и однородностью времени), можно отметить, что при значениях коэффициента перехода  $\beta$ , находящихся в диапазонах  $\beta > 1$  и  $0 < \beta < 1$ , нарушается условие симметрии пространства и времени.

Если по определению (исходному предположению) симметричное пространство и время являются областью, в которой должна действовать

специальная теория относительности, а при использовании специальной теории относительности для рассмотрения отдельного примера № 3 было отмечено нарушение условия симметрии пространства и времени при значениях коэффициента перехода  $\beta$ , находящихся в диапазонах  $\beta > 1$  и  $0 < \beta < 1$ , то мы имеем случай, когда есть теория, но нет области ее применения.

Т.е., в случае симметрии пространства и времени связь между координатами и временем в инерциальных системах отсчета не может быть записана с помощью специальной теории относительности при значениях коэффициента перехода  $\beta$ , находящихся в диапазонах  $\beta > 1$  и  $0 < \beta < 1$ .

Одним словом, при симметрии пространства и времени для инерциальных систем отсчета специальная теория относительности (при коэффициенте перехода  $\beta \neq 1$ ) не применима.

Как показано при рассмотрении примера № 3, законы сохранения импульса, механической энергии (при неизменности потенциальной энергии системы) и момента импульса замкнутой механической системы, а, следовательно, и условие симметрии пространства и времени выполняются только при коэффициенте перехода  $\beta = 1$  (когда  $v_{\text{кр}1} = \pm \infty$  или  $v_{\text{кр}2} = \pm \infty$ ), т.е. когда коэффициент перехода  $\beta$  не является функцией скорости  $V$  движения инерциальной системы отсчета.

А это позволяет сделать вывод, что при симметрии пространства и времени соотношения между координатами и временем одного и того же события в двух инерциальных системах отсчета - неподвижной  $O_1x_1y_1z_1$  и подвижной  $O_2x_2y_2z_2$ , изображенных на рис. 1, исходя из формул (34)÷(38) и (255), должны иметь следующий вид:

$$x_1 = x_2 + (V \cdot t) \quad (275)$$

$$x_2 = x_1 - (V \cdot t) \quad (276)$$

$$y_1 = y_2 \quad (36)$$

$$z_1 = z_2 \quad (37)$$

$$t_1 = t_2 = t \quad (277)$$

т.е., преобразования Галилея (система уравнений (35), (36) и (275)-(277)) верны для любых значений скорости  $V$  движения инерциальной системы отсчета.

### 3.3. Пример № 4, подтверждающий выводы, сделанные при рассмотрении примера № 3

Попробуем рассмотреть следующий пример, позволяющий также прийти к выводам, полученным при рассмотрении примера № 3.

В примере № 4 в отличие от примера № 3 будут рассматриваться не криволинейные, а прямолинейные движения тел, составляющих замкнутую механическую систему.

Допустим, что имеются две инерциальные системы отсчета, аналогичные системам отсчета, изображенным на рис.1, неподвижная  $O_1x_1y_1z_1$  и подвижная  $O_2x_2y_2z_2$ , которая движется со скоростью  $V$  параллельно оси  $O_1x_1$  относительно системы  $O_1x_1y_1z_1$ .

Предположим, что имеется замкнутая механическая система тел, показанная на рис. 10 и состоящая из тела 1 и тела 2, имеющих равные массы  $M_0$  в состоянии покоя, и пружины 3.

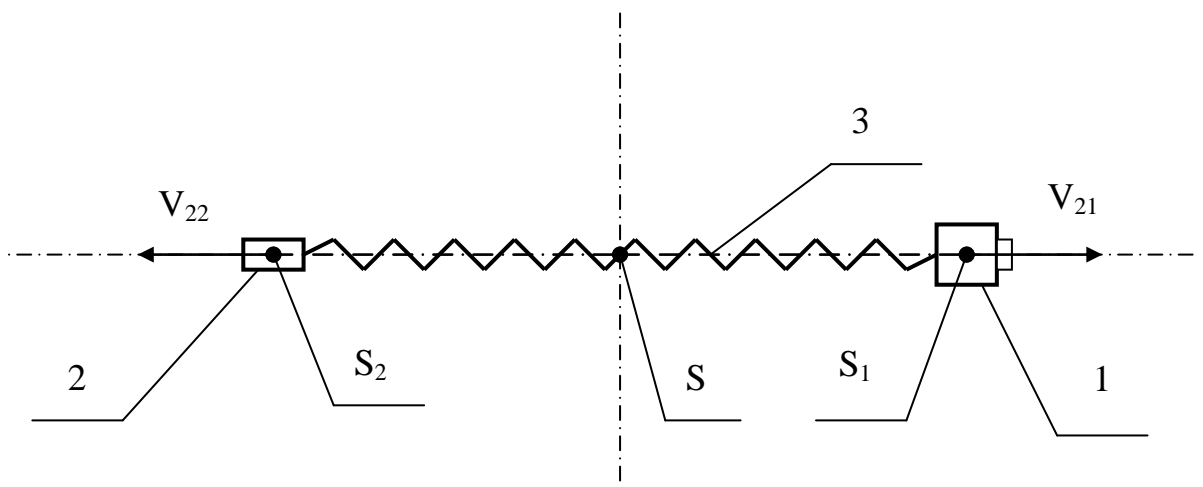


Рис. 10

Тела 1 и 2 соединены с абсолютно упругой пружиной 3, не имеющей массы (масса которой ничтожно мала по сравнению с массами тел 1 и 2).

Под действием пружины 3 тела 1 и 2 совершают симметричные возвратно-поступательные движения относительно общего центра масс системы тел 1 и 2 - точки  $S$ .

Центр масс тела 1 - точка  $S_1$  и центр масс тела 2 - точка  $S_2$  постоянно находятся на одной прямой линии, проходящей через точки  $S$ ,  $S_1$  и  $S_2$ .

Поместим рассматриваемую замкнутую механическую систему тел 1 и 2 с пружиной 3 в подвижную систему отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  таким образом, чтобы точка  $S$  была бы неподвижна в этой системе отсчета и совпадала с началом координат  $O_2$ , а точки  $S_1$  и  $S_2$  находились бы на оси  $O_2x_2$ , как показано на рис. 11÷13.

В подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  тела 1 и 2 совершают симметричные периодически повторяющиеся через время  $T_2$  (период колебания системы тел 1 и 2) движения.

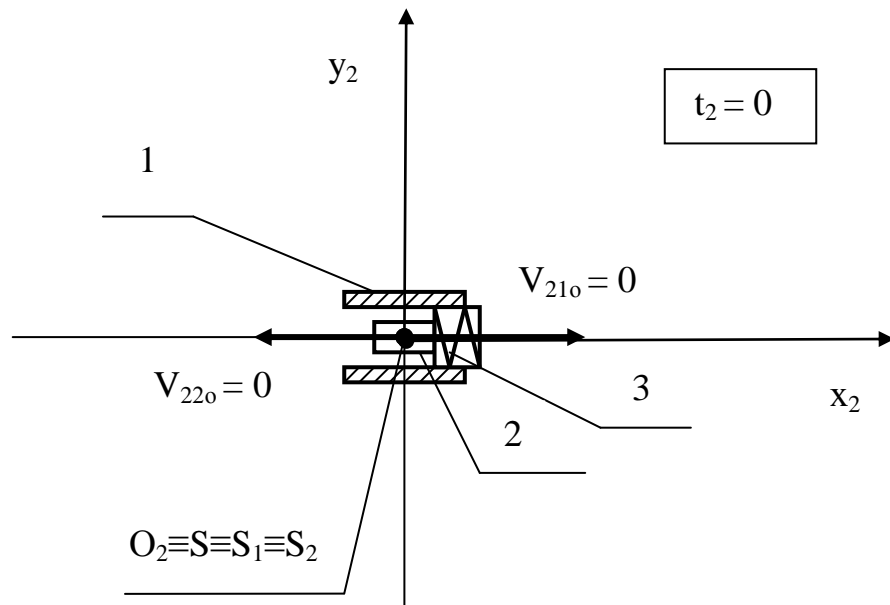


Рис. 11

Предположим, как показано на рис. 11, что в момент начала отсчета времени ( $t_2=0$ ) в системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  пружина 3 полностью сжата (пружина 3 имеет максимальное значение потенциальной энергии сжатия),

тела 1 и 2 находятся в состоянии покоя, причем точка  $S_1$  совпадает с точкой  $S_2$ , точкой  $S$  и началом координат  $O_2$  (допустим, что добились этого конструктивно).

После момента времени  $t_2=0$  пружина 3 начинает расжиматься и расталкивать тела 1 и 2 в разные стороны, т.е. потенциальная энергия сжатия пружины 3 начинает переходить в кинетические энергии тел 1 и 2 (скорость  $V_{21}$  и  $V_{22}$  движения тел 1 и 2 соответственно будет постепенно возрастать).

В системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  в какой-то момент времени  $t_2$  равный  $t_{2м0}$  пружина 3 будет полностью расжата (потенциальная энергия пружины 3 будет равна нулю), тела 1 и 2 будут иметь максимальные величины  $V_{21м}$  и  $V_{22м}$  скорости своего движения и максимальные значения кинетических энергий (как показано на рис. 12).

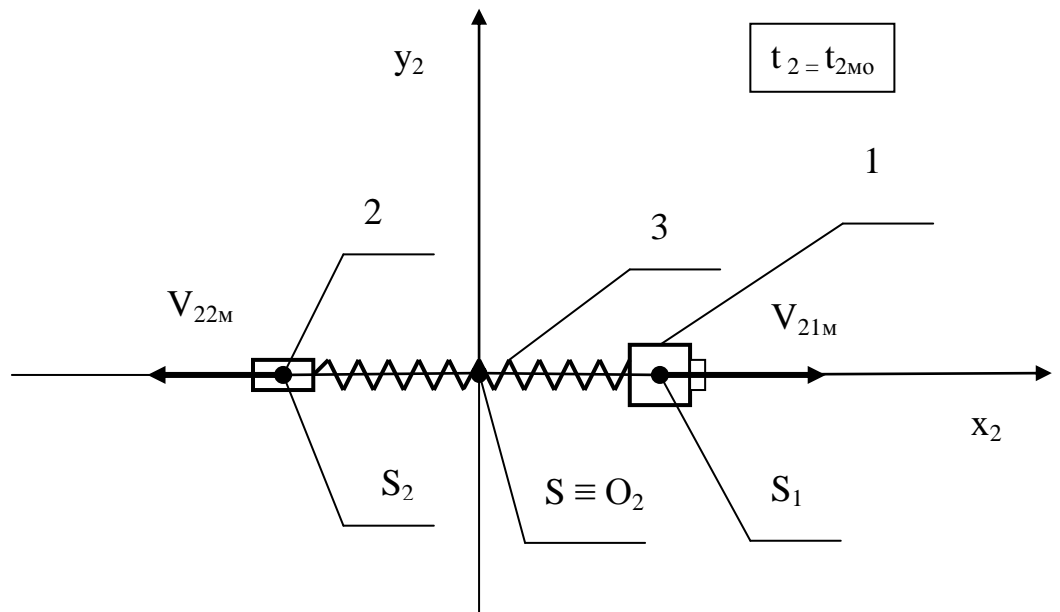


Рис. 12

После момента времени  $t_{2м0}$  пружина 3 начинает растягиваться, а тела 1 и 2 начинают замедляться, т.к. кинетические энергии тел 1 и 2 начинают переходить в потенциальную энергию растяжения пружины 3.

В системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  в какой-то момент времени  $t_2$  равный  $t_{2т0}$

тела 1 и 2 остановятся (кинетические энергии тел 1 и 2 будут равны нулю), а пружина 3 полностью растянется (кинетическая энергия тел 1 и 2 перейдет полностью в потенциальную энергию растяжения пружины 3, которая в момент времени  $t_{2то}$  достигнет своего максимального значения), как показано на рис. 13.

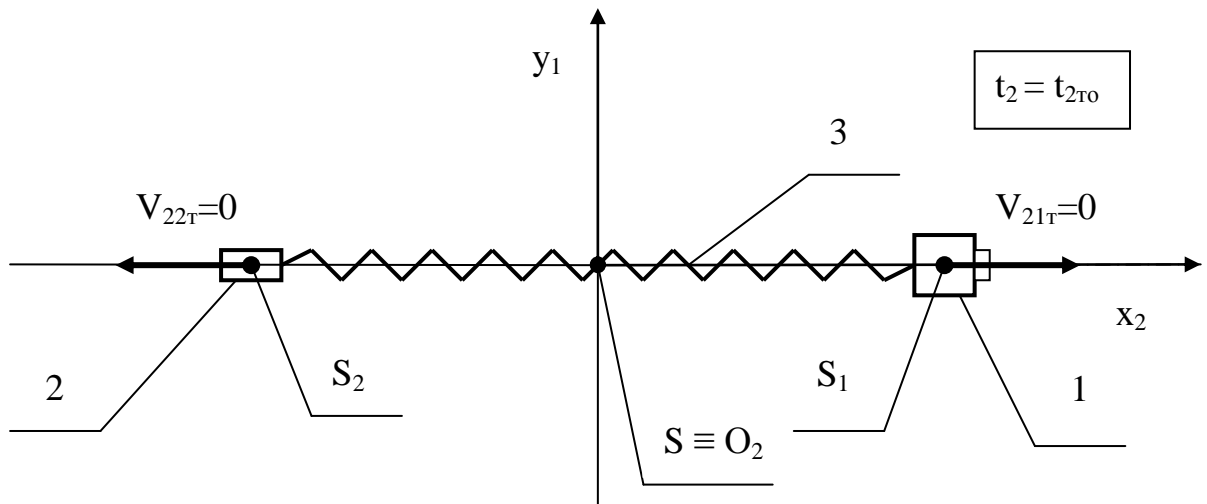


Рис. 13

Далее от момента времени  $t_{2то}$  до момента времени  $t_2$ , равного периоду  $T_2$  колебания, процесс взаимодействия тел 1 и 2 с пружиной 3 будет происходить обратным образом (т.е. пружина 3 будет вначале сжиматься сама, передавая свою потенциальную энергию растяжения в кинетические энергии тел 1 и 2, а затем будет сжиматься под воздействием тел 1 и 2, которые будут передавать свои кинетические энергии в энергию сжатия пружины 3).

Учитывая периодичность движения тел 1 и 2 (и пружины 3), можно отметить, что:

- положение и состояние тел 1 и 2 и пружины 3, соответствующее моменту времени  $t_2 = 0$ , будет иметь место и для моментов времени  $t_{2p}$ , равных:

$$t_{2p} = T_2 \cdot n \quad (278)$$

где:  $n = 0, 1, 2, 3, 4 \dots$ ;

- положение и состояние тел 1 и 2 и пружины 3, соответствующее моменту времени  $t_{2m0}$ , будет иметь место и для моментов времени  $t_{2m}$ , равных:

$$t_{2m} = t_{2m0} + (T_2 \cdot n) \quad (279)$$

- положение и состояние тел 1 и 2 и пружины 3, соответствующее моменту времени  $t_{2т0}$ , будет иметь место и для моментов времени  $t_{2т}$ , равных:

$$t_{2т} = t_{2т0} + (T_2 \cdot n) \quad (280)$$

Для упрощения дальнейшего рассмотрения предположим, что тела 1 и 2 являются точечными.

В подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$ , исходя из симметрии (в любой момент времени  $t_2$  массы тел 1 и 2 одинаковы, центр  $S$  масс тел 1 и 2 совпадает с началом координат  $O_2$ ), для любого момента времени  $t_2$  связь между координатой  $x_{21}$  тела 1 и координатой  $x_{22}$  тела 2 запишется следующим образом:

$$x_{21} = -x_{22} \quad (281)$$

а связь между скоростью  $V_{21}$  движения тела 1 и скоростью  $V_{22}$  движения тела 2 будет иметь вид:

$$V_{21} = -V_{22} \quad (282)$$

Если рассматривать движение системы тел 1 и 2 и пружины 3 в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  и подвижной инерциальной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$ , как показано на рис. 14, то опираясь на уравнения (34) и (35), можно написать связь между координатой  $x_{11}$  тела 1 в момент времени  $t_{11}$  в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  и координатой  $x_{21}$  тела 1 в момент времени  $t_{21}$  в подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$ :

$$x_{11} = \beta \cdot [x_{21} + (V \cdot t_{21})] \quad (283)$$

$$x_{21} = \beta \cdot [x_{11} - (V \cdot t_{11})] \quad (284)$$

Аналогично, используя уравнения (34) и (35), можно записать связь между координатой  $x_{12}$  тела 2 в момент времени  $t_{12}$  в неподвижной системе



отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  и координатой  $x_{22}$  тела 2 в момент времени  $t_{22}$  в подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  :

$$x_{12} = \beta \cdot [x_{22} + (V \cdot t_{22})] \quad (285)$$

$$x_{22} = \beta \cdot [x_{12} - (V \cdot t_{12})] \quad (286)$$

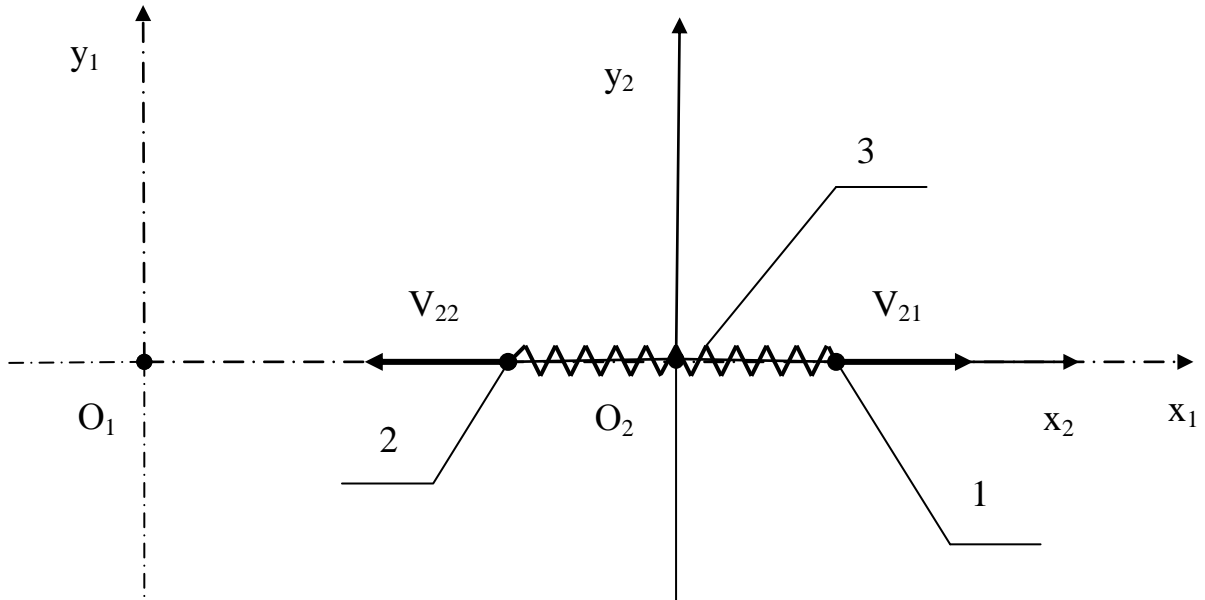


Рис. 14

С помощью формулы (38) можно написать связь между значениями времен  $t_{11}$ ,  $t_{21}$  и  $t_{12}$ ,  $t_{22}$  :

$$t_{11} = \frac{(\beta^2 - 1) \cdot x_{21}}{\beta \cdot V} + (\beta \cdot t_{21}) \quad (287)$$

$$t_{12} = \frac{(\beta^2 - 1) \cdot x_{22}}{\beta \cdot V} + (\beta \cdot t_{22}) \quad (288)$$

В рассматриваемом примере нас будет интересовать положение тел 1 и 2 в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  в один и тот же момент времени, т.е. когда:

$$t_{11} = t_{12} \quad (289)$$

Тогда уравнение (289) с учетом формул (287) и (288) примет вид:

$$\frac{(\beta^2 - 1) \cdot (x_{21} - x_{22})}{\beta^2 \cdot V} = (t_{22} - t_{21}) \quad (290)$$

В подвижной системе отсчета  $\mathbf{O}_2\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2\mathbf{z}_2$  при выполнении условия (289) представляет интерес положение тел 1 и 2, когда:

$$t_{21} = t_{22} = t_{2p} \quad (291)$$

Подставив условие (291) в уравнение (290), получим:

$$x_{21} = x_{22} = 0 \quad (292)$$

Т.е. для выполнения условий (289) и (291) тела 1 и 2 (их центры масс) в рассматриваемый момент времени должны находиться в точке, совпадающей с центром масс  $\mathbf{S}$  тел 1 и 2 и началом координат  $\mathbf{O}_2$ .

Отсюда:

$$t_{2p} = T_2 \cdot n \quad (278)$$

где:  $n = 0, 1, 2, 3, 4 \dots$

Учитывая, что  $x_{21} \geq 0$  и  $x_{22} \leq 0$  (исходное условие), для случая, когда  $t_{21} \neq t_{2p}$  и  $t_{22} \neq t_{2p}$ , из формулы (290) видно, что величина времени  $t_{22}$  в зависимости от значения коэффициента перехода  $\beta$  может быть:

$$- \quad t_{22} > t_{21} \quad \text{при } \beta > 1 ; \quad (293)$$

$$- \quad t_{22} < t_{21} \quad \text{при } 0 < \beta < 1 ; \quad (294)$$

$$- \quad t_{22} = t_{21} \quad \text{при } \beta = 1 . \quad (295)$$

Теперь можем приступить к проверке выполнения закона сохранения импульса.

Рассмотрим два момента времени в неподвижной системе отсчета  $\mathbf{O}_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1\mathbf{z}_1$ .

### 3.3.1.1. Момент времени $t_{1p}$

Как показано на рис. 15, в подвижной системе отсчета  $\mathbf{O}_2\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2\mathbf{z}_2$  в момент времени  $t_2$ , равный  $t_{2p}$ , тела 1 и 2 находятся в одной точке, совпадающей с центром координат  $\mathbf{O}_2$  (исходное условие), и их скорости  $V_{21p}$  и  $V_{22p}$  движения соответственно равны:

$$V_{21p} = 0 \quad (296)$$

$$V_{22p} = 0 \quad (297)$$

Исходя из того, что в подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  в момент времени  $t_{2p}$  тела 1 и 2 находятся в одной точке (т.е. координаты  $x_{21p}$  и  $x_{22p}$  тел 1 и 2 равны), в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  тела 1 и 2 в момент времени  $t_{1p}$ , соответствующий моменту времени  $t_{2p}$  в подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$ , также будут находиться в одной точке (т.е. координаты  $x_{11p}$  и  $x_{12p}$  тел 1 и 2 равны).

Таким образом, в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  в момент времени  $t_{1p}$  тела 1 и 2 находятся в одной точке и их скорости  $V_{11p}$  и  $V_{12p}$  движения соответственно с учетом формулы (40) и равенств (296) и (297) равны:

$$V_{11p} = V \quad (298)$$

$$V_{12p} = V \quad (299)$$

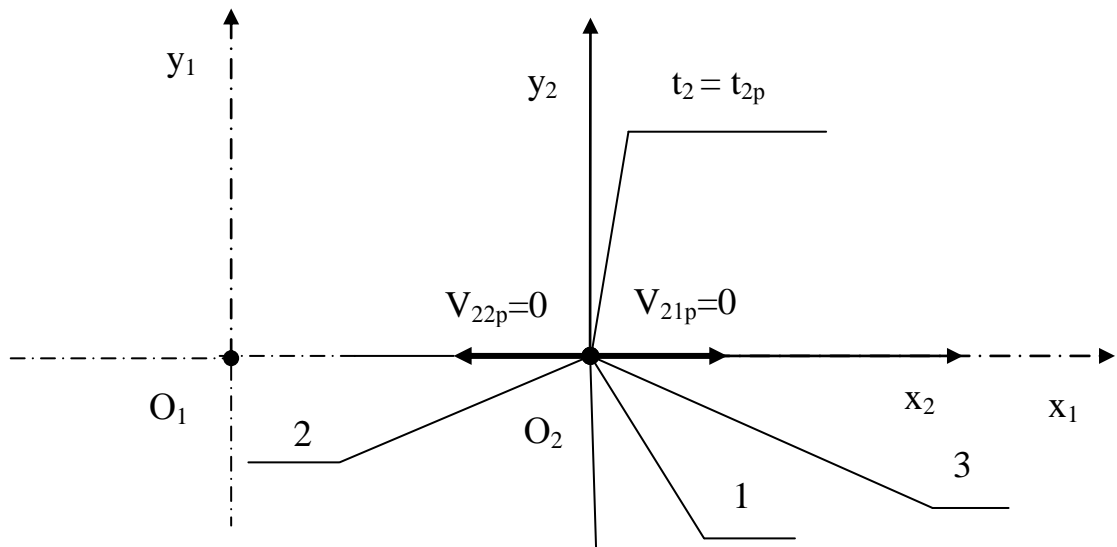


Рис. 15

Следовательно, в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  импульс  $P_{1p}$  замкнутой механической системы тел 1 и 2 (и пружины 3) в момент времени  $t_{1p}$  с учетом формулы (147) и равенств (298) и (299) равен:

$$P_{11p} + P_{12p} = P_{1p} = \frac{2 \cdot M_0 \cdot V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{кр}^2}}} \quad (300)$$

### 3.3.1.2. Момент времени $t_{1T}$

Как уже рассматривалось ранее, в подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  в момент времени  $t_2$  равный  $t_{2T}$ , который для тела 1 запишем, как  $t_{21T}$ , тело 1 имеет скорость  $V_{21T}$  движения равную нулю:

$$V_{21T} = 0 \quad (301)$$

т.к. пружина 3 в момент времени  $t_2$  равный  $t_{21T}$  имеет максимальную потенциальную энергию растяжения.

Положению тела 1 в подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  в момент времени  $t_{21T}$  будет соответствовать положение тела 1 в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  в момент времени  $t_{1T}$ .

В неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  в момент времени  $t_{1T}$  тело 1, согласно уравнению (40), будет иметь скорость  $V_{11T}$  своего движения равную:

$$V_{11T} = V \quad (302)$$

В неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  в момент времени  $t_1$  равный  $t_{1T}$  тело 2 будет иметь скорость движения равную  $V_{12T}$ .

Положению тела 2 в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  в момент времени  $t_{1T}$  будет соответствовать положение тела 2 в подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  в момент времени  $t_2$ , равный  $t_{22T}$ .

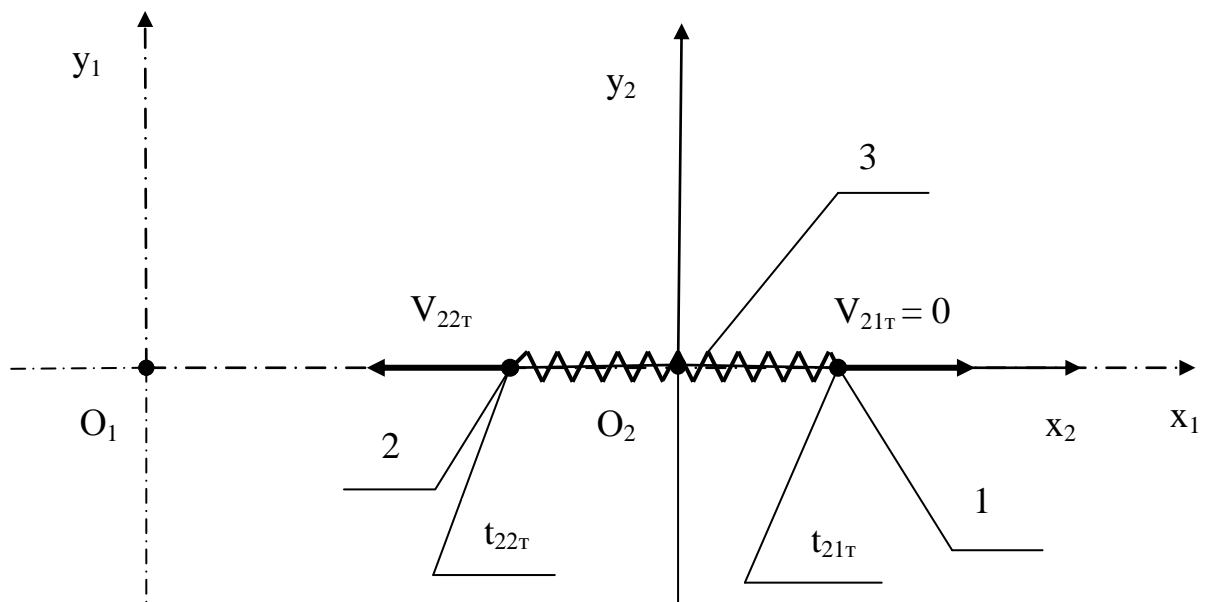


Рис. 16

Как показано на рис. 16, предположим, что в подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  в момент времени  $t_2$  равный  $t_{22T}$  тело 2 имеет скорость движения равную  $V_{22T}$ .

Учитывая условие (293), что при коэффициенте перехода  $\beta > 1$  время  $t_{22} > t_{21}$ , можно отметить, что при коэффициенте перехода  $\beta > 1$  скорость  $V_{22T}$  тела 2 будет направлена по направлению оси  $O_2x_2$ .

Кроме этого, исходя из условия (294), утверждающего, что при коэффициенте перехода  $0 < \beta < 1$  время  $t_{22} < t_{21}$ , можно отметить, что при коэффициенте перехода  $0 < \beta < 1$  скорость  $V_{22T}$  тела 2 будет иметь направление, противоположное направлению оси  $O_2x_2$ .

Используя формулу (40), можно записать связь между скоростями  $V_{12T}$  и  $V_{22T}$  тела 2:

$$V_{12T} = \frac{V_{22T} + V}{\frac{(\beta^2 - 1) \cdot V_{22T}}{\beta^2 \cdot V} + 1} \quad (303)$$

Следовательно, в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  импульс  $P_{1T}$  замкнутой механической системы тел 1 и 2 (и пружины 3) в момент времени  $t_{1T}$  с учетом формулы (147) и равенства (302) равен:

$$P_{11T} + P_{12T} = P_{1T} = \frac{M_0 \cdot V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{\text{хкр}}^2}}} + \frac{M_0 \cdot V_{12T}}{\sqrt{1 - \frac{V_{12T}^2}{V_{\text{хкр}}^2}}} \quad (304)$$

### 3.3.1.3. Определение условий выполнения закона сохранения импульса для примера № 4

В связи с тем, что механическая система тел 1 и 2 (и пружины 3) является замкнутой, закон сохранения импульса позволяет записать для моментов времени  $t_{1p}$  и  $t_{1T}$  в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  следующее уравнение:

$$P_{1T} = P_{1p}$$

Или, исходя из формул (300) и (304):

$$\frac{M_0 \cdot V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{\text{кр}}^2}}} + \frac{M_0 \cdot V_{12\tau}}{\sqrt{1 - \frac{V_{12\tau}^2}{V_{\text{кр}}^2}}} = \frac{2 \cdot M_0 \cdot V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{\text{кр}}^2}}} \quad (305)$$

Из уравнения (305) следует, что необходимым условием (значением скорости  $V_{12\tau}$ ), при котором в примере № 4 будет выполняться закон сохранения импульса в неподвижной инерциальной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$ , является:

$$V_{12\tau} = V \quad (306)$$

или с учетом формулы (303):

$$V_{22\tau} = 0 \quad (307)$$

Из равенств (306) и (307) следует, что величины скоростей  $V_{12\tau}$  и  $V_{22\tau}$  не зависят от величины скорости  $V$  (и, следовательно, не зависят от величины коэффициента перехода  $\beta$ ).

Но в подвижной системе отсчета  $O_2x_2y_2z_2$  при значениях координат  $x_{21\tau}$  тела 1 и  $x_{22\tau}$  тела 2, не равных нулю, равенство нулю скорости  $V_{22\tau}$  тела 2 возможно только, когда:

$$t_{22\tau} = t_{21\tau} \quad (308)$$

Вставив равенство (308) в формулу (290), получим:

$$\frac{(\beta^2 - 1) \cdot (x_{21} - x_{22})}{\beta^2 \cdot V} = 0 \quad (309)$$

Но т.к. величина  $(x_{21} - x_{22}) > 0$ , то из уравнения (309) будем иметь еще одно условие выполнения закона сохранения импульса в неподвижной инерциальной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  для примера № 4:

$$\beta = 1 \quad (259)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что в замкнутой механической системе тел, рассматриваемой в примере № 4, для значений коэффициента перехода, находящихся в диапазонах  $\beta > 1$  и  $0 < \beta < 1$ , закон сохранения импульса не выполняется.

#### IV. Заключение

В заключение можно обобщить вышенаписанное.

##### Кинематика

Использование принципа относительности и симметрии пространства и времени позволило:

1. Перейти от системы уравнений связи инерциальных систем отсчета - неподвижной  $O_1x_1y_1z_1$  и подвижной  $O_2x_2y_2z_2$ :

$$x_1 = \beta_1 \cdot [x_2 + (V_1 \cdot t_2)] \quad (24)$$

$$x_2 = \beta_2 \cdot [x_1 + (V_2 \cdot t_1)] \quad (25)$$

$$y_1 = \beta_3 \cdot y_2 \quad (26)$$

$$y_2 = \beta_4 \cdot y_1 \quad (27)$$

$$z_1 = \beta_5 \cdot z_2 \quad (28)$$

$$z_2 = \beta_6 \cdot z_1 \quad (29)$$

к системе уравнений:

$$x_1 = \beta \cdot [x_2 + (V \cdot t_2)] \quad (34)$$

$$x_2 = \beta \cdot [x_1 - (V \cdot t_1)] \quad (35)$$

$$y_1 = y_2 \quad (36)$$

$$z_1 = z_2 \quad (37)$$

2. Установить, что значения коэффициента перехода  $\beta$  для инерциальных систем отсчета могут находиться в двух взаимоисключающих диапазонах:

- $\beta > 1$ ,
- $0 < \beta < 1$

3. Получить формулу для коэффициента перехода  $\beta$  для инерциальных систем отсчета для случая  $\beta > 1$ :

$$\beta_{>}^2 = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{v_{\text{хкр}1}^2}} \quad (59)$$

где:  $v_{\text{хкр}1}$  - постоянная действительная величина;

4. Получить формулу для коэффициента перехода  $\beta$  для инерциальных

систем отсчета для случая  $0 < \beta < 1$ :

$$\beta_{<}^2 = \frac{1}{1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}} \quad (60)$$

где:  $v_{\text{хкр}2}$  - постоянная действительная величина;

5. Установить, что при коэффициенте перехода  $\beta > 1$  существует такое действительное значение скорости  $V_{\text{хкр}}$  (равное  $v_{\text{хкр}1}$ ) движения точки, которая будет инвариантна во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета:

$$v_{\text{хкр}1} = \text{Const} \quad (71)$$

6. Установить, что при коэффициенте перехода  $0 < \beta < 1$  имеет место только мнимое значение скорости  $V_{\text{хкр}}$  (равное  $(i \cdot v_{\text{хкр}2})$ ) движения точки, которая будет инвариантна во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета:

$$v_{\text{хкр}2} = \text{Const} \quad (72)$$

### Динамика

1. Используя обязательность выполнения в инерциальных системах отсчета закона сохранения импульса и закона сохранения механической энергии (а точнее, его частного случая при постоянстве потенциальной энергии - постоянства кинетической энергии) для замкнутой механической системы тел, двигающихся прямолинейно и испытывающих только абсолютно упругие взаимодействия, были получены зависимости массы, импульса и кинетической энергии тела от скорости его движения:

- при  $\beta > 1$  :

$$M(V)_{>} = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{\text{хкр}1}^2}}} \quad (150)$$



$$P(V)_{>} = \frac{M_0 \cdot V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{\text{хкр}1}^2}}} \quad (151)$$

$$E_{\text{к}}(V)_{>} = M_0 \cdot v_{\text{хкр}1}^2 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_{\text{хкр}1}^2}}} - 1 \right) \quad (152)$$

- при  $0 < \beta < 1$  :

$$M(V)_{<} = \frac{M_0}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} \quad (171)$$

$$P(V)_{<} = \frac{M_0 \cdot V}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} \quad (172)$$

$$E_{\text{к}}(V)_{<} = M_0 \cdot v_{\text{хкр}2}^2 \cdot \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_{\text{хкр}2}^2}}} \right) \quad (173)$$

2. На отдельном примере (пример № 3), в котором рассматривалась замкнутая механическая система тел, движущихся нелинейно, было показано, что при значениях коэффициента перехода  $\beta$ , находящихся в диапазонах  $\beta > 1$  и  $0 < \beta < 1$ , имеет место нарушение законов сохранения импульса, момента импульса и механической энергии (при неизменности потенциальной энергии системы), т.е., импульс, момент импульса и кинетическая энергия замкнутой механической системы оказались переменными во времени величинами.

Связь между законами сохранения импульса, механической энергии и момента импульса замкнутой механической системы и симметрией пространства и времени (однородностью и изотропностью пространства и

однородностью времени) позволила отметить, что при значениях коэффициента перехода  $\beta$ , находящихся в диапазонах  $\beta > 1$  и  $0 < \beta < 1$ , нарушается условие симметрии пространства и времени.

При рассмотрении примера № 3 было показано, что законы сохранения импульса, механической энергии и момента импульса замкнутой механической системы, а, следовательно, и условие симметрии пространства и времени выполняются только при коэффициенте перехода  $\beta = 1$ .

А учитывая, что условие симметрии пространства и времени является требованием (исходным условием) специальной теории относительности к пространству и времени, то вступление выводов специальной теории относительности в противоречие с условием симметрии пространства и времени, заложенным при ее создании, позволяет предположить следующее:

**- связь между координатами и временем в инерциальных системах отсчета не может быть записана с помощью специальной теории относительности, если значения коэффициента перехода  $\beta$  будут находиться в диапазонах  $\beta > 1$  или  $0 < \beta < 1$ ;**

**- в однонаправленных инерциальных системах отсчета коэффициент перехода  $\beta$  не может быть больше или меньше 1, а может быть только равен 1;**

**- в инерциальных системах отсчета коэффициент перехода  $\beta$  не зависит от величины скорости  $V$  движения инерциальных систем отсчета;**

**- преобразования Галилея верны для инерциальных систем отсчета при любых значениях скорости  $V$  их движения:**

$$x_1 = x_2 + (V \cdot t) \quad (275)$$

$$x_2 = x_1 - (V \cdot t) \quad (276)$$

$$y_1 = y_2 \quad (36)$$

$$z_1 = z_2 \quad (37)$$

$$t_1 = t_2 = t \quad (277)$$

Здесь также следует отметить, что выводы, сделанные в главе «Динамика», верны лишь при выполнении принятого предположения о том, что величина потенциальной энергии тела не зависит от величины скорости его перемещения (т.е. от величины его кинетической энергии).

P.S.: Основные идеи изложены в статье "Специальная теория относительности без постулата о постоянстве скорости света", напечатанной в журнале "Актуальные проблемы современной науки" (ISSN 1680-2721) № 1 (34) за 2007 год и размещенной на сайтах "Новые идеи и гипотезы" <http://new-idea.kulichki.net/?mode=physics> и "Математическая физика. Теория относительности" <http://www.matphysics.ru/>.

Автор

В.Н. Кочетков